

# Fourierova transformace v 1D a 2D

Václav Hlaváč

České vysoké učení technické v Praze

Český institut informatiky, robotiky a kybernetiky

160 00 Praha 6, Jugoslávských partyzánů 1580/3

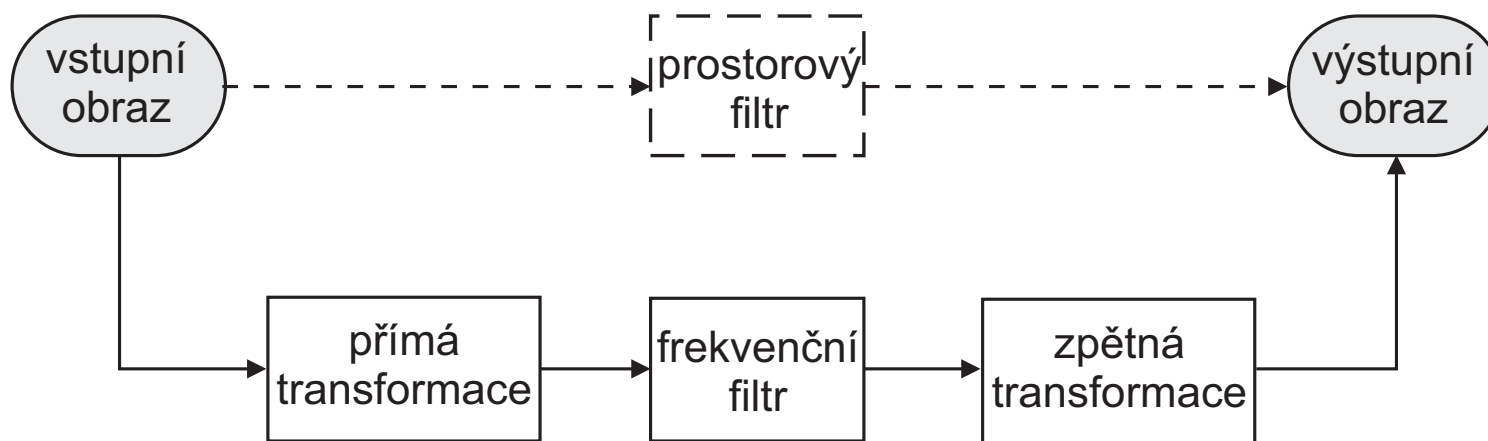
<http://people.ciirc.cvut.cz/hlavac>, [vaclav.hlavac@cvut.cz](mailto:vaclav.hlavac@cvut.cz)

také z Centra strojového vnímání, <http://cmp.felk.cvut.cz>

## Osnova přednášky:

- ◆ Fourierova tx v 1D, výpočetní složitost, FFT.
- ◆ Fourierova tx ve 2D, centrování spektra.
- ◆ Příklady ve 2D.

## Výchozí představa, filtrování v prostoru frekvencí



*Filtrace v prostorové oblasti.* Pro 1D signály bychom řekli v časové oblasti. Lineární kombinace vstupního obrazu s koeficienty (často lokálního) filtru. Základní operací je konvoluce.

*Filtrace ve frekvenční oblasti.* Převod do “frekvenční reprezentace”, tam filtrace, převod zpět.

Pro první představu stačí *Fourierova transformace*, ale jsou i další lineární integrální transformace sloužící k podobnému účelu, např. kosínová nebo vlnková (wavelet).

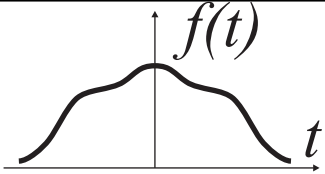
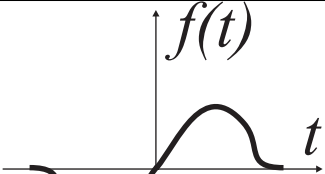
# 1D Fourierova transformace, úvod

- ◆ Fourierova transformace je základním nástrojem pro (lineární) zpracování signálů a v teorii řízení.
- ◆ Dovoluje vzájemně jednoznačný převod signálů z/do časové reprezentace  $f(t)$  do/z frekvenční reprezentace  $F(\xi)$ .
- ◆ Umožňuje analyzovat frekvenční obsah (spektrum) signálu.
- ◆ FT je vhodná pro periodické signály.
- ◆ Když signál není periodický, potom lze použít krátkodobou FT nebo lineární integrální transformaci s bázovými funkcemi lokalizovanými v čase nebo 2D prostoru. Příkladem je vlnková transformace (wavelets), Gaborovy filtry.



Joseph Fourier  
1768-1830

# Sudá, lichá a komplexně sdružená funkce

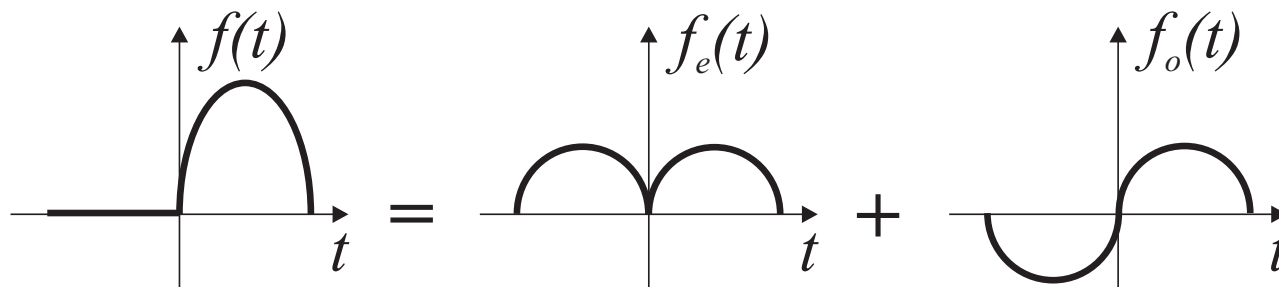
Sudá	$f(t) = f(-t)$	
Lichá	$f(t) = -f(-t)$	
Komplexně sdružená	$f(\xi) = f^*(-\xi)$	$f(5) = 2 + 3i$ $f(-5) = 2 - 3i$

- ◆  $f^*$  označuje komplexně sdruženou funkci.
- ◆  $i$  je komplexní jednotka.

# Každou funkci lze rozložit na sudou a lichou část

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

$$f_e(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \quad f_o(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$



## Fourierova Tx definice: spojitý případ

$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\xi)$ , kde  $\xi$  [Hz= $s^{-1}$ ] je frekvence a  $2\pi\xi$  [ $s^{-1}$ ] je úhlová frekvence.

Fourierova Tx	Inverzní Fourierova Tx
$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt$	$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{2\pi i \xi t} d\xi$

Jaký je význam inverzní FT? Vyjádřeme pomocí Riemannova součtu:

$$f(t) \doteq \left( \dots + F(\xi_0) e^{2\pi i \xi_0 t} + F(\xi_1) e^{2\pi i \xi_1 t} + \dots \right) \Delta\xi ,$$

kde  $\Delta\xi = \xi_{k+1} - \xi_k$  pro  $\forall k$  .

$\Rightarrow$  Každá 1D funkce se dá vyjádřit jako vážený součet (integrál) mnoha komplexních exponenciál (díky Eulerově vztahu  $e^{i\xi} = \cos \xi + i \sin \xi$  také jako součet sinusovek a kosinusovek).

# Podmínky pro existenci Fourierovy transformace

1.  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ , tj.  $f(t)$  musí klesat rychleji než exponenciála.
2.  $f(t)$  smí mít nejvýše konečný počet nespojitostí v každém konečném intervalu.

---

Pro digitální obrazy Fourierova transformace vždy existuje, protože digitální obrazy jsou omezené a mají konečný počet nespojitostí.

## Fourierova Tx, symetrie

- ◆ Symetrie vzhledem ke komplexně sdružené části, tj.  $F(-i\xi) = F^*(i\xi)$ .
- ◆  $|F(i\xi)|$  je vždy sudá.
- ◆ Fáze  $F(i\xi)$  je vždy lichá.
- ◆  $\operatorname{Re}\{F(i\xi)\}$  je vždy sudá.
- ◆  $\operatorname{Im}\{F(i\xi)\}$  je vždy lichá.
- ◆ Sudá část  $f(t)$  se transformuje na reálnou část  $F(i\xi)$ .
- ◆ Lichá část  $f(t)$  se transformuje na imaginární část  $F(i\xi)$ .



## Konvoluce, definice, spojitý případ

- ◆ Konvoluce (ve funkcionální analýze) je operace na dvou funkcích  $f$  a  $h$ , která vytvoří třetí funkci  $(f * h)$ , která se používá jako modifikace jedné ze vstupních funkcí.
- ◆ Konvoluce je integrál “míchající” hodnoty dvou funkcí, a to funkce  $h(t)$ , která je posouvána a překrývá se s funkcí  $f(t)$  nebo obráceně.
- ◆ Uvažujme nejdříve **spojitý případ** s obecnými nekonečnými mezemi

$$(f * h)(t) = (h * f)(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) h(\tau) d\tau .$$

- ◆ Meze integrálu můžeme omezit na interval  $[0, t]$ , protože předpokládáme nulové hodnoty funkcí pro záporný argument

$$(f * h)(t) = (h * f)(t) \equiv \int_0^t f(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(t - \tau) h(\tau) d\tau .$$

# Korelace a konvoluce

**Konvoluce**  $*$  definovaná pro 1D signály používá překlopené jádro  $h$

$$(f * h)(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau .$$

**Vzájemná korelace**  $\star$  definovaná pro 1D signály používá (nepřeklopené) jádro  $h$

$$(f \star h) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\tau) h(t + \tau) d\tau ,$$

kde  $f^*$  označuje komplexně sdruženou funkci k  $f$ .

---

Vzájemná korelace je mírovu podobnosti dvou 1D funkcí v závislosti na posunu  $\tau$  (např. na časovém zpoždění).

## Konvoluce, diskrétní aproximace

$$(f * h)(i) = (h * f)(i) \equiv \sum_{m \in \mathcal{O}} h(i - m) f(m) = \sum_{m \in \mathcal{O}} h(i) f(i - m) ,$$

kde  $\mathcal{O}$  je lokální okolí “současné pozice” a  $h$  je konvoluční jádro (též konvoluční maska).

## Fourierova Tx, vlastnosti (1)

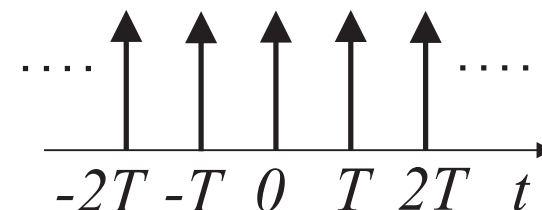
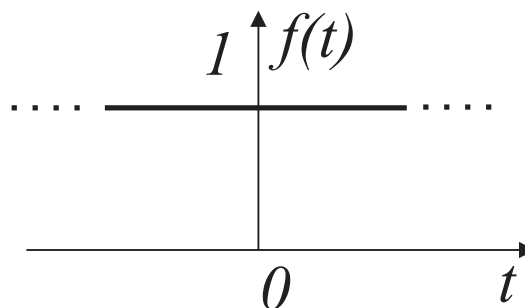
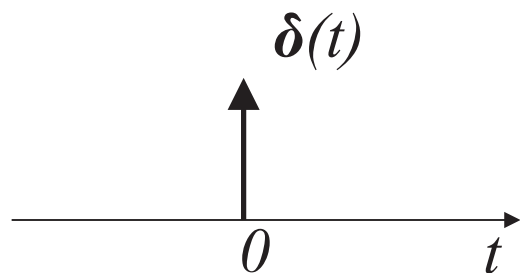
Vlastnosti	$f(t)$	$F(\xi)$
Linearita	$a f_1(t) + b f_2(t)$	$a F_1(\xi) + b F_2(\xi)$
Dualita	$F(t)$	$f(-\xi)$
Konvoluce	$(f * g)(t)$	$F(\xi) G(\xi)$
Součin	$f(t) g(t)$	$(F * G)(\xi)$
Časový posun	$f(t - t_0)$	$e^{-2\pi i \xi t_0} F(\xi)$
Frekvenční posun	$e^{2\pi i \xi_0 t} f(t)$	$F(\xi - \xi_0)$
Derivace	$\frac{df(t)}{dt}$	$2\pi i \xi F(\xi)$
Násobení $t$	$t f(t)$	$\frac{i}{2\pi} \frac{dF(\xi)}{d\xi}$
Změna měřítka času	$f(a t)$	$\frac{1}{ a } F(\xi/a)$

# Fourierova Tx, vlastnosti (2)

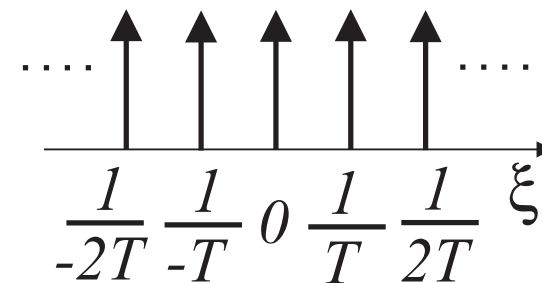
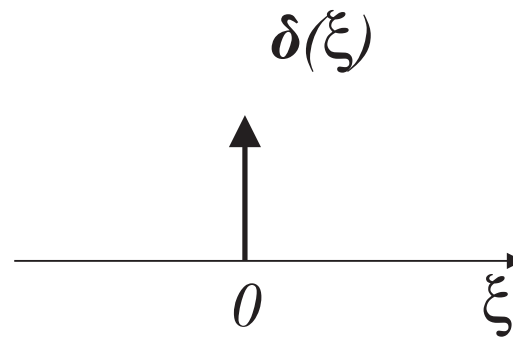
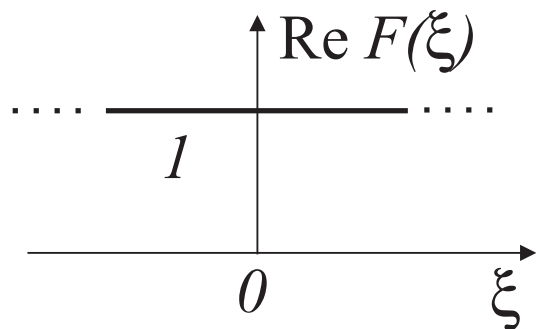
Hodnota	$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$	Plocha pod funkcí $f(t)$
Hodnota $f(0)$	$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)d\xi$	Plocha pod $F(\xi)$
Parsevalova věta	$\int_{-\infty}^{\infty}  f(t) ^2dt = \int_{-\infty}^{\infty}  F(\xi) ^2d\xi$	energie $f$ = energie $F$

# Základní dvojice Fourierovy Tx (1)

$f(t)$



$F(\xi)$

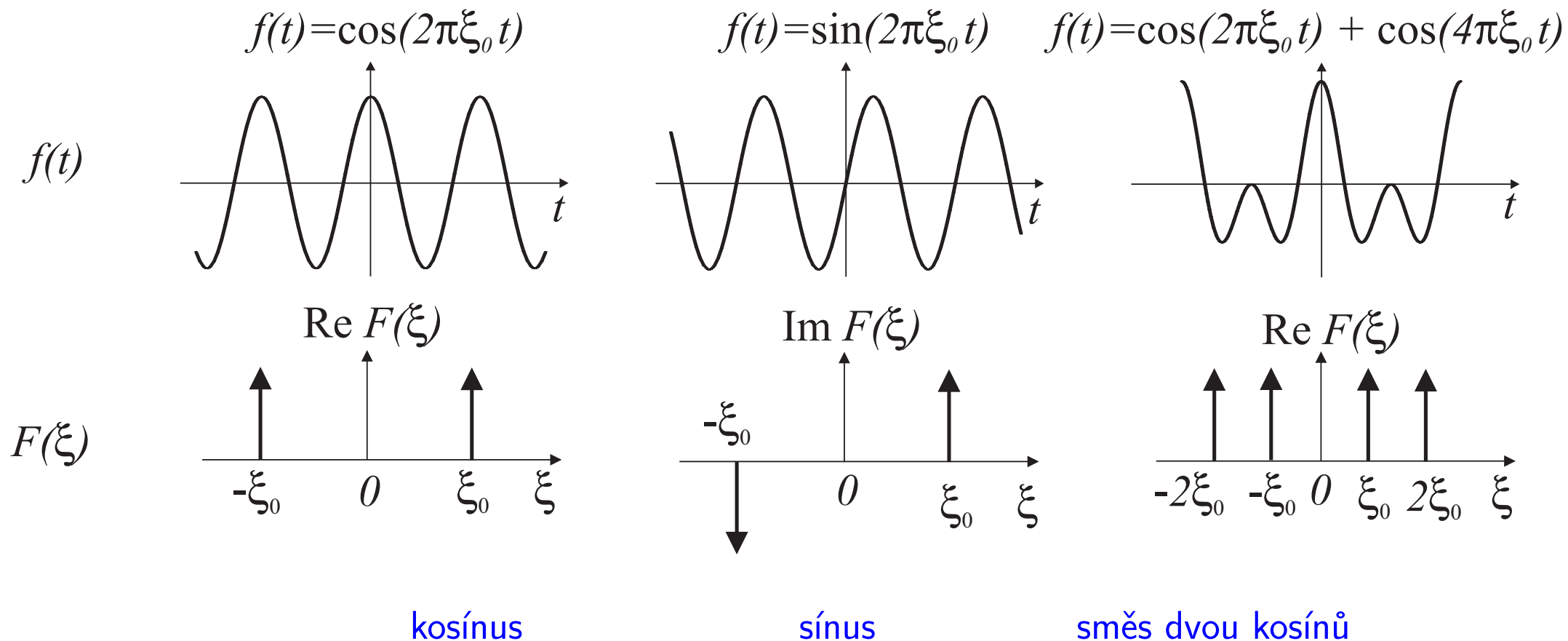


Dirac

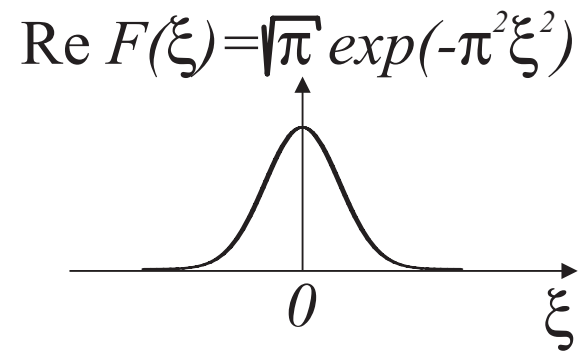
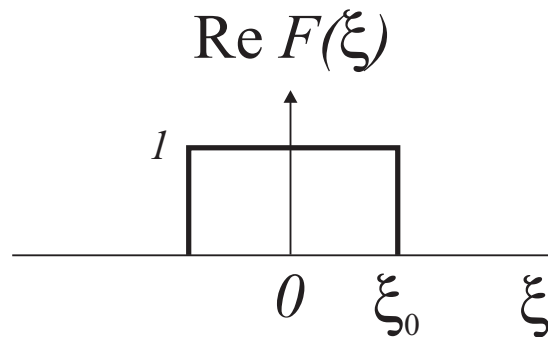
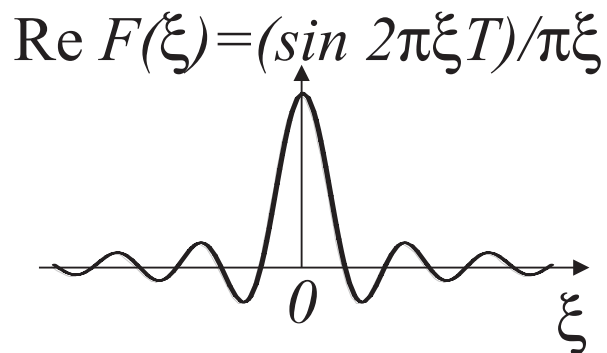
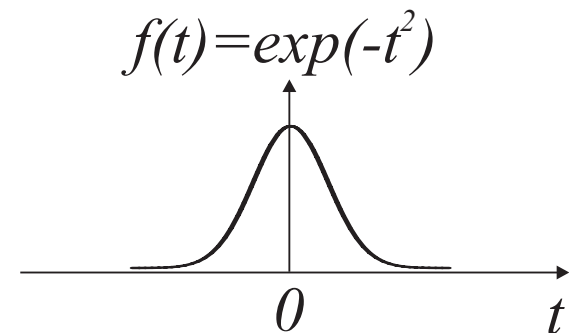
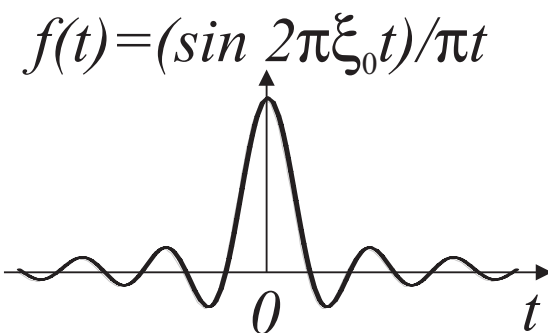
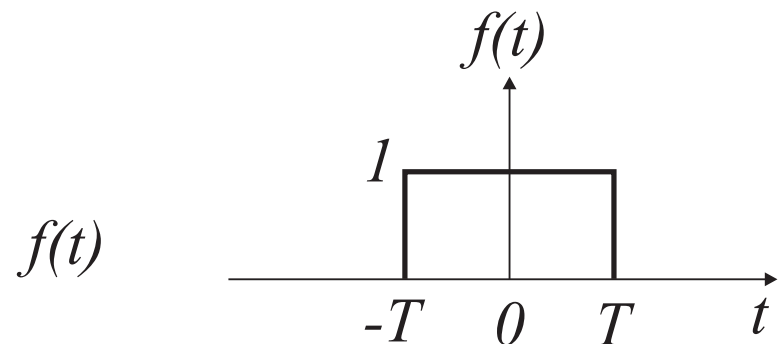
konstanta

$\infty$  posloupnost Diraců

## Základní dvojice Fourierovy Tx (2)



## Základní dvojice Fourierovy Tx (3)



obdélník v  $t$

obdélník v  $\xi$

Gaussián



## Princip nejistoty

- ◆ Všechny dvojice (časový signál  $\leftrightarrow$  Fourierův obraz) jsou vázány principem nejistoty.
- ◆ Signál o krátké době trvání má široké frekvenční spektrum a obráceně.
- ◆ 
$$(\text{trvání signálu}) \cdot (\text{šířka spektra}) \geq \frac{1}{\pi}$$
- ◆ Pozorování: Gaussián  $e^{-t^2}$  modulovaný sinusovkou (Gaborova funkce) má nejmenší součin mezi trváním a šířkou spektra (optimum).
- ◆ Tento princip je vázán s Heisenbergovým principem nejistoty z kvantové mechaniky (Werner Heisenberg, publikováno 1927, Nobelova cena 1932). Tento princip omezuje přesnost, s níž lze určit polohu částice a její hybnost.
- ◆ W. Heisenberg 1927: *“Čím přesněji je určena poloha částice, tím méně přesně známe v daném okamžiku hybnost a naopak.”*

## Neperiodické signály

Fourierova transformace předpokládá periodický signál. A co když potřebujeme zpracovávat neperiodický signál? Dva obvyklé přístupy.

1. Zpracovat signál po malých částech (oknech) a předpokládat, že vně je signál periodický.

- ◆ Přístup zavedl Dennis Gabor v roce 1946 a nazývá se krátkodobá Fourierova transformace (Short time Fourier transform).

*Dennis Gabor, 1900-1979, vynálezce holografie, Nobelova cena za fyziku 1971, studoval v Budapešti, PhD v Berlíně 1927, odešel před nacisty do Británie v 1933.*

- ◆ Pouhé rozsekání signálu na obdélníková okna není dobré, protože na rozhraní oken jsou nespojitosti. Ty se ve spektru projeví nežádoucími vysokými frekvencemi.
- ◆ Proto se signál obvykle konvoluje s tlumící váhovou funkcí, obvykle Gaussián nebo Hammingova funkce, zajišťující nulovou hodnotu signálu na okraji a vně okna.

2. Použití složitějších báзовých funkcí, např. vlnek ve vlnkové (wavelets) transformaci.

## Diskrétní Fourierova transformace

- ◆ Uvažujme vstupní signál (posloupnost)  $f(n)$ ,  $n = 0, \dots, N - 1$ .
- ◆ Nechť  $F(k)$  označuje Fourierovo spektrum (výsledek diskrétní Fourierovy transformace) signálu  $f(n)$ .
- ◆ Diskrétní Fourierova transformace

$$F(k) \equiv \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-\frac{2\pi i}{N} kn}$$

Spektrum  $F(k)$  je periodicky prodloužené s periodou  $N$ .

- ◆ Inverzní diskrétní Fourierova transformace

$$f(n) \equiv \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{\frac{2\pi i}{N} kn}$$

## Výpočetní složitost, připomínka

- ◆ Při úvahách o složitosti se abstrahuje od určitého počítače a uvažuje se pouze asymptotické chování příslušného algoritmu. Hledají se meze, které se použijí např. vyjádření časových nebo paměťových nároků algoritmu.
- ◆ Hledá se asymptotická horní nebo dolní mez analyzované funkce  $g(n)$  (tj. meze růstu hodnoty funkce) na základě jiné funkce, pro niž je vyjádření růstu jednodušší.
- ◆ Značení  $\mathcal{O}(n)$ ,  $\Omega(n)$  popisuje limitní chování funkce, když její argument  $n$  roste k  $\infty$ .
- ◆  $\mathcal{O}(g(n))$  označuje množinu funkcí  $f(n)$ , které asymptoticky omezují  $g(n)$  zdola. Formálně existuje kladná konstanta  $c$  a číslo  $n_0$  takové, že  $0 \leq f(n) \leq c g(n)$  pro všechna  $n \geq n_0$ .
- ◆  $\Omega(g(n))$  označuje množinu funkcí  $f(n)$ , které asymptoticky omezují  $g(n)$  shora. Formálně existuje kladná konstanta  $c$  a číslo  $n_0$  takové, že  $0 \leq c g(n) \leq f(n)$  pro všechna  $n \geq n_0$ .

## Výpočetní složitost, značení

- ◆ Značení 'Velké  $\mathcal{O}$ '; např.  $\mathcal{O}(n^2)$  říká, že počet kroků algoritmu bude v nejhorším případě úměrný kvadrátu počtu vzorků.
- ◆ Aditivní členy a násobící konstanty se ignorují, protože se hledá pouze kvalitativní chování algoritmu.
- ◆ Kvadratická složitost  $\mathcal{O}(n^2)$  je horší než lineární složitost  $\mathcal{O}(n)$  nebo konstantní  $\mathcal{O}(1)$  (tj. nezávislá na délce  $n$ ), ale lepší než kubická  $\mathcal{O}(n^3)$ .
- ◆ Když je složitost exponenciální, např.  $\mathcal{O}(2^n)$ , potom to většinou znamená, že algoritmus je prakticky nepoužitelný pro rozsáhlejší úlohy.
- ◆ Podobně značení  $\Omega()$ .

# Výpočetní složitost diskrétní Fourierovy transformace

- ◆ Nechť  $W$  je komplexní číslo,  $W \equiv e^{-\frac{2\pi i}{N}}$ .

Diskrétní Fourierova transformace (DFT) 
$$F(k) \equiv \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-\frac{2\pi i}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} W^{nk} f(n)$$

- ◆ Vektor  $f(n)$  se násobí maticí, jejíž prvek  $(n, k)$  je komplexní konstantou  $W$  umocněnou na součin  $n$  a  $k$ .
- ◆ Výpočet každého DFT koeficientu potřebuje  $N$  komplexních násobení a  $N - 1$  komplexních sčítání.
- ◆ Výpočet všech  $N$  DFT koeficientů potřebuje  $N^2$  komplexních násobení a  $N(N - 1)$  komplexních sčítání.
- ◆ Výpočetní složitost je  $\mathcal{O}(N^2)$ .

# Rychlá Fourierova transformace

- ◆ Rychlá Fourierova transformace (FFT – fast Fourier transform) je efektivní algoritmus pro výpočet diskrétní Fourierovy transformace a její inverze.
- ◆ Tvzení: FFT má výpočetní složitost  $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ .
- ◆ **Příklad** (podle Numerical recipes in C):
  - Uvažujme poslounost  $N = 10^6$  a hypotetický počítač s 1 mikrosekundovým cyklem.
  - FFT by spotřebovovala 30 sekund času procesoru.
  - DFT by spotřebovala dva týdny času procesoru, tj. 1.209.600 sekund, což je asi 40.000  $\times$  více.

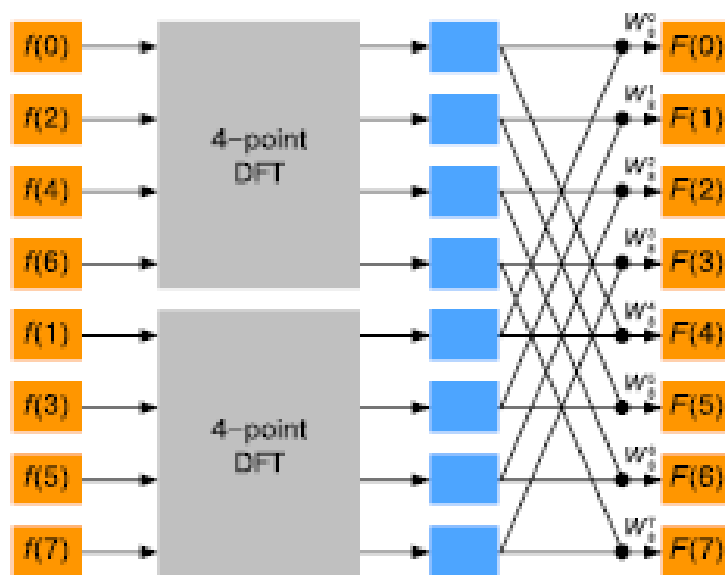
## Rychlá Fourierova transformace (2)

- ◆ DFT posloupnosti délky  $N$  lze vyjádřit jako součet dvou DFT posloupností délky  $N/2$ , v jedné jsou **liché** a ve druhé **sudé** vzorky.  
*(Danielson, Lanczos v 1942; později rozvinuto Cooley, Tukey v 1965)*
- ◆ Existují dva přístupy jak rozdělit signál zvané
  - Rozdělení v čase, angl. decimation in time (DIT);
  - Rozdělení ve frekvenci, angl. decimation in frequency (DIF).
- ◆ *Poznámka 1: FFT existuje také pro obecné délky  $N$ .*
- ◆ *Poznámka 2: Vstupní posloupnost se v obecnosti dá rozdělit na více než dvě části, které uvažujeme zde.*



## Rozdělení v čase (DIT)

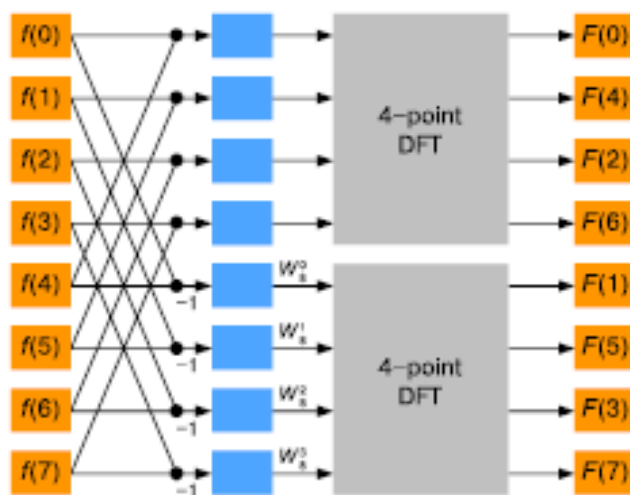
- ♦ Vstupní sekvence  $f(n)$ ,  $n = 1, \dots, N - 1$  se rozdělí na sudou část  $f^e(n')$  a lichou část  $f^o(n')$ ,  $n' = 0, 1, \dots, N/2 - 1$ .
- ♦ Fourierova transformace částí  $F^e$ ,  $F^o$  se vypočte rekurzivně  $F(k) = F^e(k) + W^{Nk} F^o(k)$ , kde  $k = 0, 1, \dots, N$ .
- ♦ Signály  $F^e$  and  $F^o$  mají poloviční délku. Díky jejich periodicitě platí  $F^e(k' + N/2) = F^e(k')$ ,  $F^o(k' + N/2) = F^o(k')$  pro všechna  $k' = 0, 1, \dots, N/2 - 1$ .



Poděkování: Pavel Karas.

## Rozdělení ve frekvenci (DIF)

- ◆ Vstupní sekvence  $f$  délky  $N$  se rozdělí na sekvence  $f^r$  a  $f^s$  jako  $f^r(n') = f(n') + f(n' + N/2)$ ,  $f^s = (f(n') - f(n' + N/2)) W^{n'N}$ .
- ◆ Jejich Fourierova transformace splňuje:  $F^r(k') = F(2k')$  and  $F^s(k') = 2k' + 1$  for any  $k' = 0, 1, \dots, N/2 - 1$ .
- ◆ Posloupnosti  $f^r$  a  $f^s$  se zpracují rekurzivně podle inverzních rovnic  $f(n') = \frac{1}{2} \left( f^r(n') + f^s(n') W^{N-n'} \right)$ ,  $f(n' + \frac{N}{2}) = \frac{1}{2} \left( f^r(n') - f^s(n') W^{N-n'} \right)$ .



Poděkování: Pavel Karas.

# FFT, rozdělení v čase, myšlenka důkazu

$$\begin{aligned}
 F(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{-2\pi i k n}{N}} f(n) \\
 &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} e^{\frac{-2\pi i k (2n)}{N}} f(2n) + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} e^{\frac{-2\pi i k (2n+1)}{N}} f(2n+1) \\
 &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} e^{\frac{-2\pi i k n}{N/2}} f(2n) + W^k \sum_{n=0}^{(N/2)-1} e^{\frac{-2\pi i k n}{N/2}} f(2n+1) \\
 &= F^e(k) + W^k F^o(k), \quad k = 1, \dots, N
 \end{aligned}$$

- ◆ Klíčová myšlenka: **rekurzivní výpočet** a  $N$  je mocninou 2.
- ◆ Stačí  $\log_2 N$  iterací.

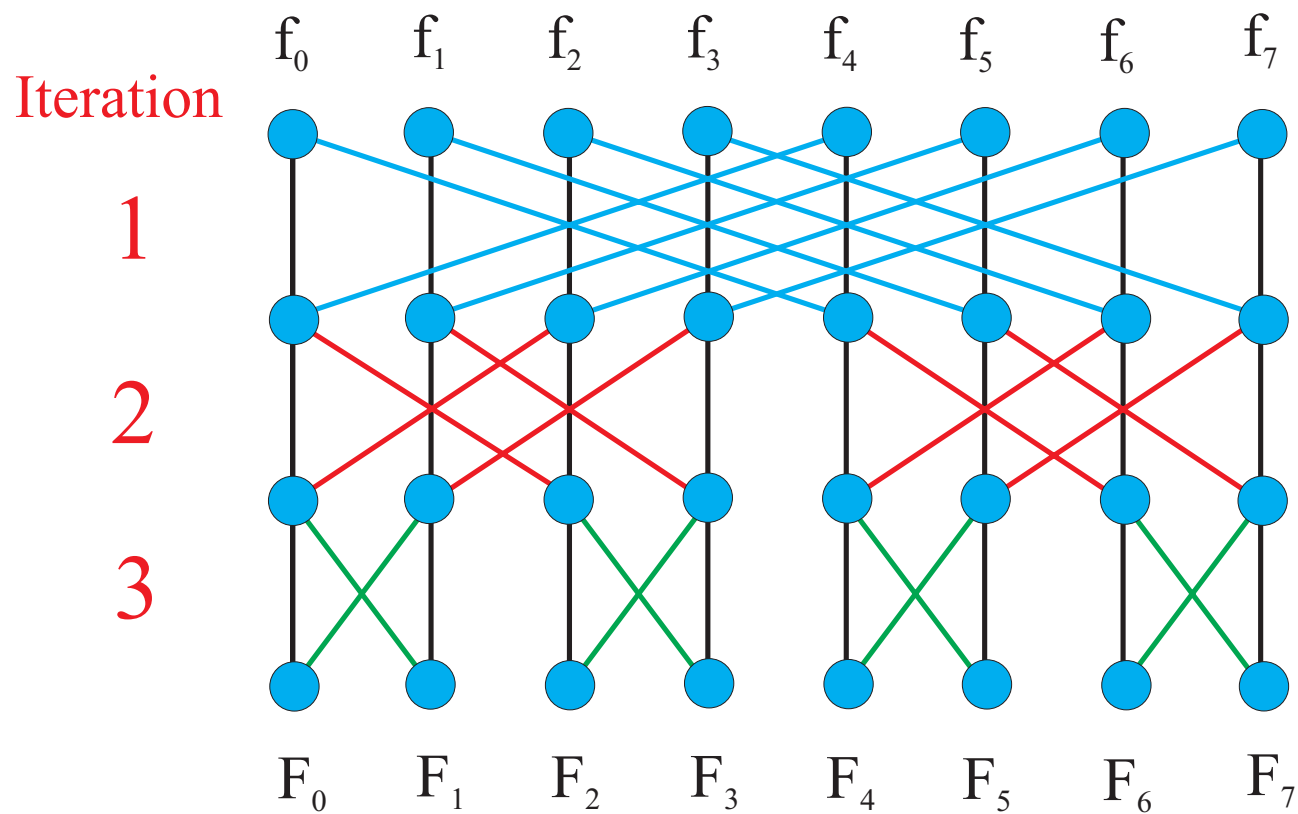
## FFT, myšlenka důkazu (2)

- ◆ Posloupnosti (spektra)  $F^e(k)$  (sudé) a  $F^o(k)$  (liché) jsou periodické podle  $k$  a mají délku  $N/2$ .
- ◆ Co je výsledkem Fourierovy transformace posloupnosti délky 1? Odpověď: Identita.
- ◆ Pro každou poslounost  $\log_2 N$  e-éček a o-óček existuje jednobodové transformace, které využijí právě jednu hodnotu ze vstupní posloupnosti,

$$F^{eoeoeoeo...oeo}(k) = f(n) \quad \text{pro některá } n.$$

- ◆ Dalším trikem je znovuvyužití částečných výsledků  $\implies$  motýlkové schéma výpočtu.

# FFT motýlkové schéma výpočtu



## 2D Fourierova transformace

*Myšlenka.* Obrazová funkce  $f(x, y)$  se rozloží na lineární kombinaci harmonických (sínusovek, kosínusovek, obecněji ortonormálních) funkcí.

*Definice přímé transformace.*  $u, v$  jsou prostorové frekvence.

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(xu + yv)} dx dy$$

# Inverzní Fourierova transformace

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2\pi i(xu+yv)} du dv$$

- ◆  $f(x, y)$  je lineární kombinací jednoduchých harmonických složek  $e^{2\pi i(xu+yv)}$ .
- ◆ Díky Eulerovu vztahu  
obecně  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ , zde  $\cos(-2\pi i x u) + i \sin(-2\pi i x u)$ ,  
jsou **cos** reálnými složkami a **sin** imaginárními složkami.
- ◆ Funkce  $F(u, v)$  (komplexní spektrum) udává váhy harmonických složek v lineární kombinaci.

# Spektrum prostorových frekvencí

Fourierovo spektrum je komplexní funkcí  $F(u, v)$ .

(Komplexní) spektrum  $F(u, v) = F_{Re}(u, v) + i F_{Im}(u, v)$

Amplitudové spektrum  $|F(u, v)| = |F(u, v)| = \sqrt{F_{Re}^2(u, v) + F_{Im}^2(u, v)}$

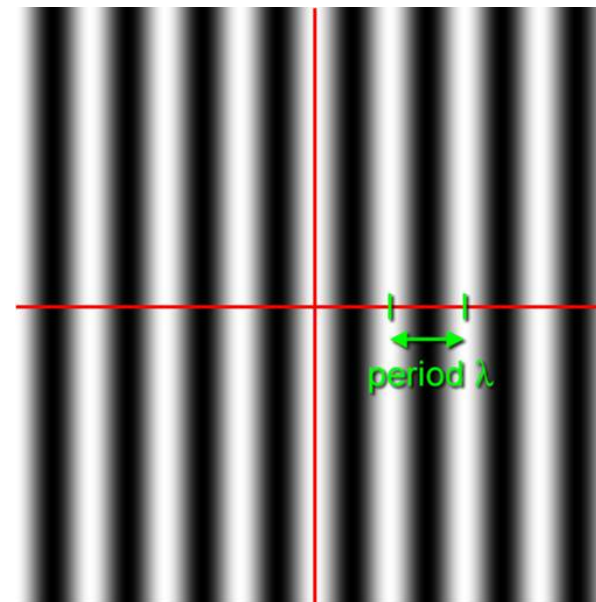
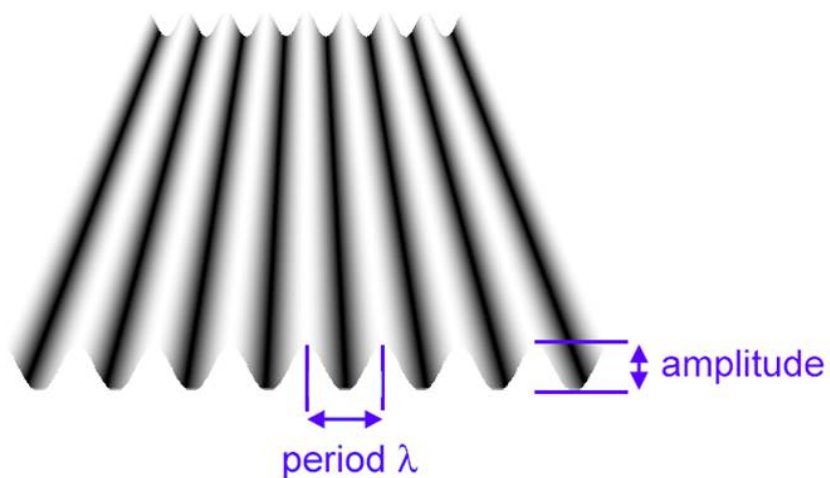
Fázové spektrum  $\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[ \frac{F_{Im}(u, v)}{F_{Re}(u, v)} \right]$

Výkonové spektrum  $P(u, v) = |F(u, v)|^2 = F_{Re}^2(u, v) + F_{Im}^2(u, v)$



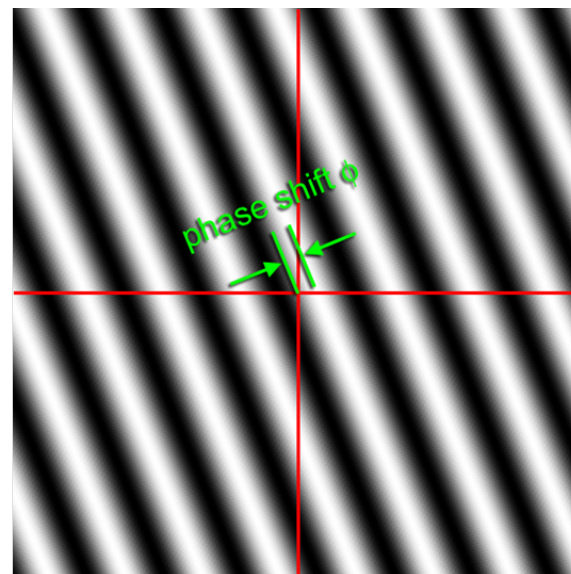
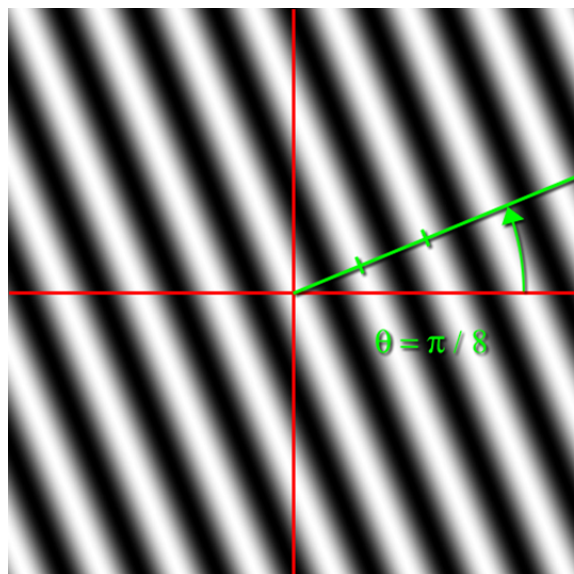
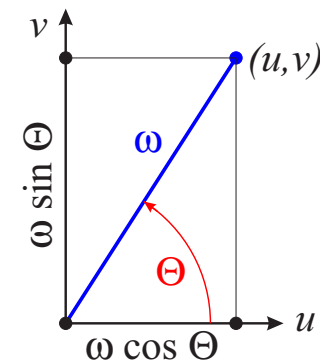
## 2D sinusovka, ilustrace

- ◆ 2D sinusovku lze zobrazit jako rovinnou vlnu s amplitudou odpovídající intenzitě (stupni šedi).
- ◆ Analogie s vlnitým plechem je zřejmá při topografickém zobrazení 2D sinusovky (nebo kosinusovky).



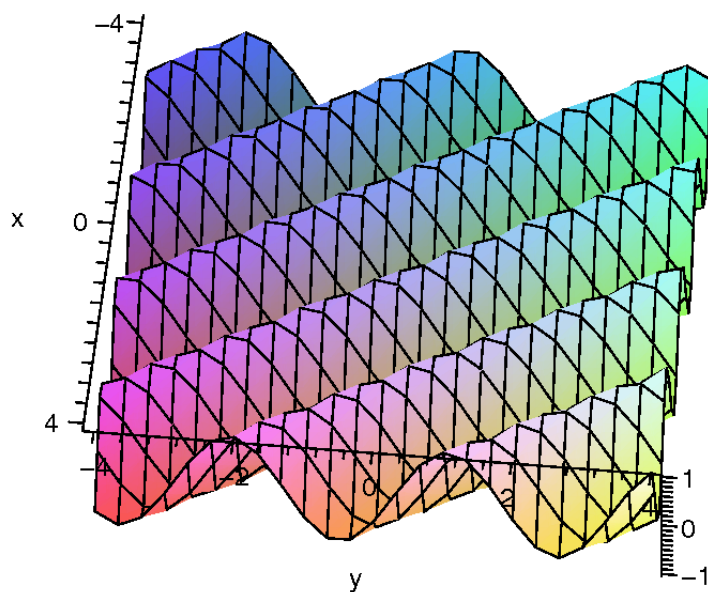
## 2D sinusovka, ilustrace (2)

$$\omega = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad u = \omega \cos \Theta, \quad v = \omega \sin \Theta, \quad \Theta = \tan^{-1} \left( \frac{v}{u} \right).$$

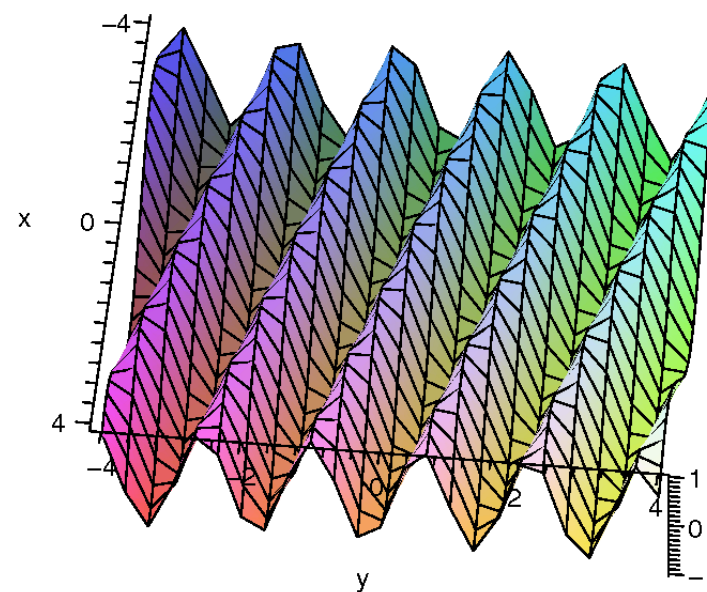


# Ilustrace, 2D vektorů báze

Analogie – vlnitý plech.



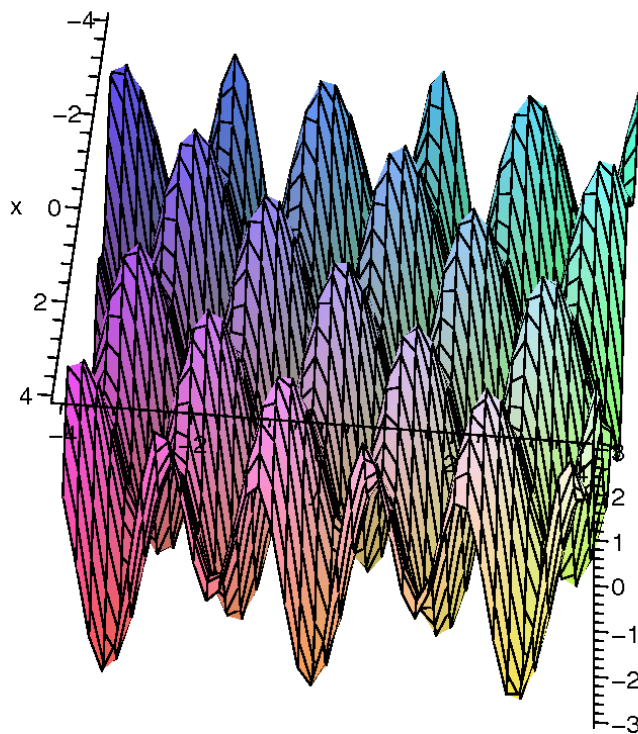
$$\sin(3x + 2y)$$



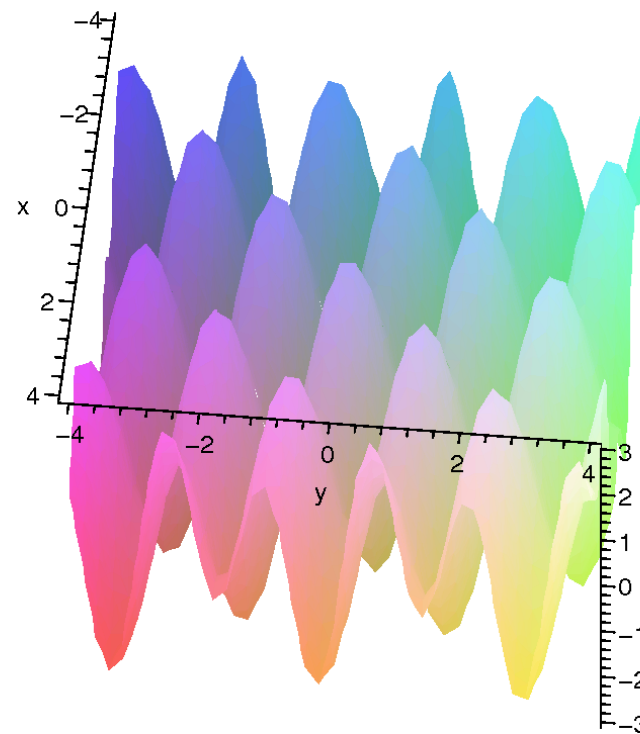
$$\cos(x + 4y)$$

# Lineární kombinace vektorů báze

Analogie – plato na vajíčka.



$$\sin(3x + 2y) + \cos(x + 4y)$$



jen jiné zobrazení

## 2D diskrétní Fourierova transformace

Přímá transformace

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp \left[ -2\pi i \left( \frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right) \right] ,$$

$$u = 0, 1, \dots, M - 1 , \quad v = 0, 1, \dots, N - 1 ,$$

Inverzní transformace

$$f(m, n) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right) \right] ,$$

$$m = 0, 1, \dots, M - 1 , \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 .$$

## 2D Fourierova Tx jako dvojnásobná 1D Fourierova Tx

Vztah pro přímou transformaci lze přepsat na

$$F(u, v) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp \left( \frac{-2\pi i n v}{N} \right) f(m, n) \right] \exp \left( \frac{-2\pi i m u}{M} \right) ,$$

$$u = 0, 1, \dots, M - 1 , \quad v = 0, 1, \dots, N - 1 .$$

- ♦ Výraz v hranatých závorkách odpovídá 1D Fourierově transformaci  $m$  – tého řádku. Výraz se vypočítá obyčejnou 1D rychlou Fourierovou transformací (FFT).
- ♦ Nyní je každý řádek nahrazen Fourierovským spektrem a může se vypočítat 1D diskrétní Fourierovou transformací každého sloupce.

# Zobrazování spekter, příklad 2D Gaussiánu

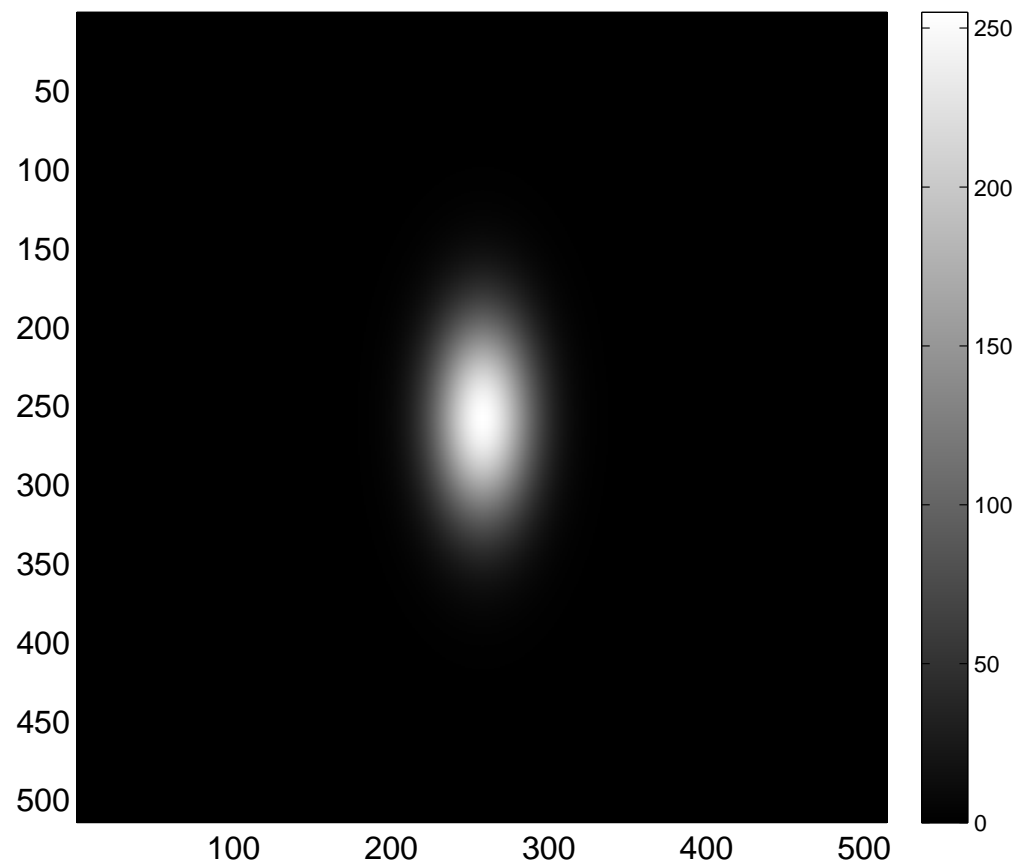
Gaussián je pro ilustraci vybrán, protože má díky principu nejistoty hladké spektrum.



# Vstupní intenzitní obrázek, souřadná soustava



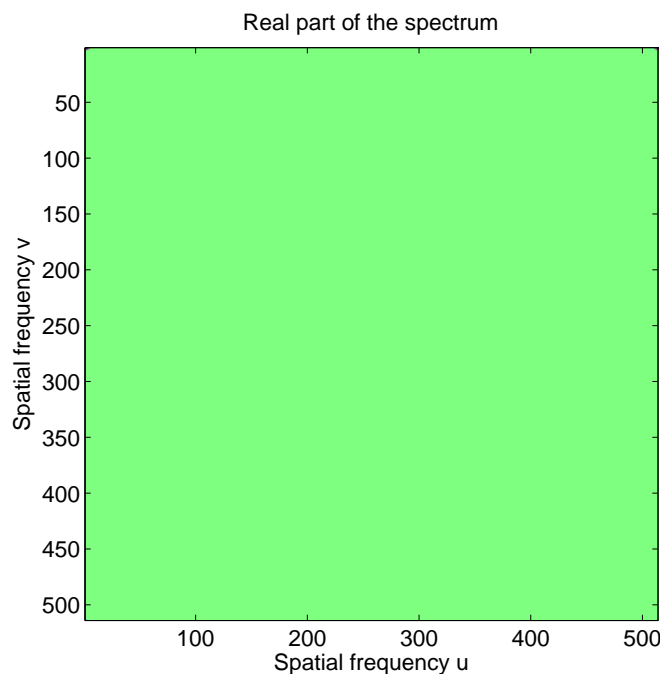
40/65



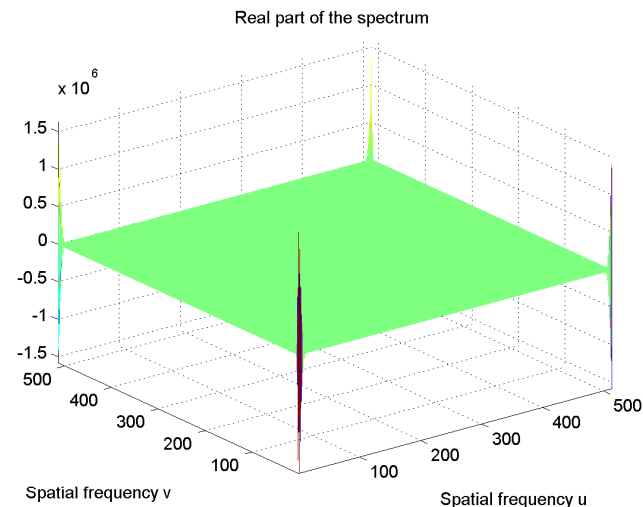


# Reálná složka spektra jako obrázek a povrch

Problém při souřadné soustavě vztažené k obrázku: zajímavé části spektra jsou v rozích a rozděleny na čtvrtiny. Díky periodicitě lze libovolně posunout.

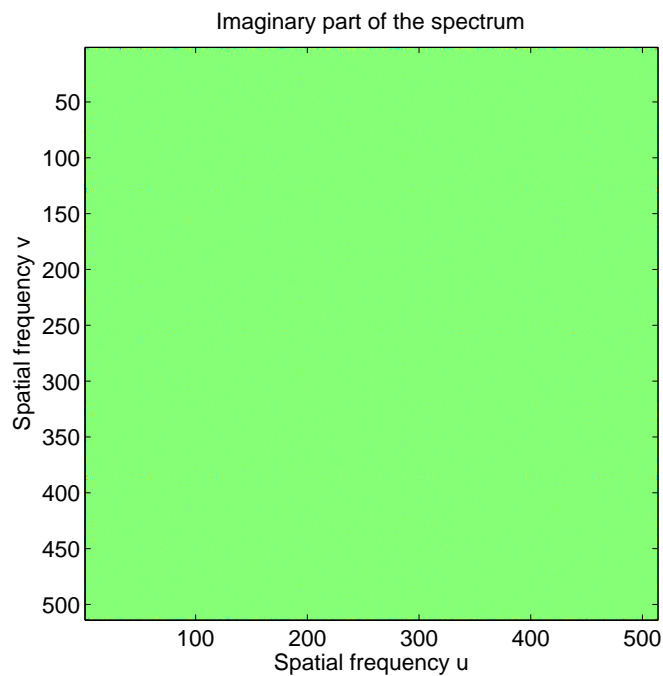


reálná část, obrázek

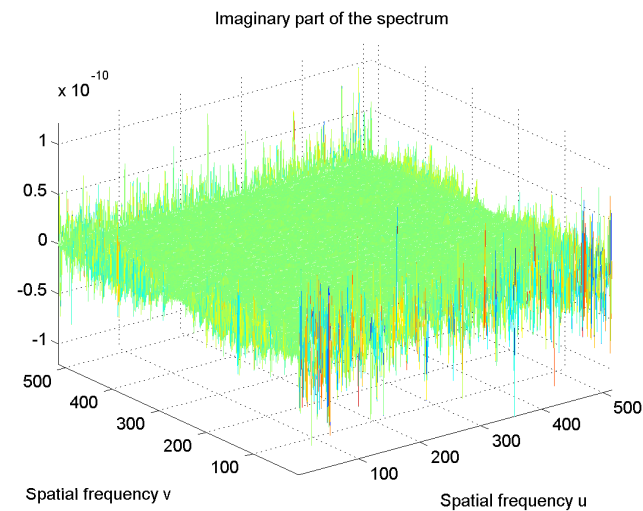


reálná část, povrch

# Imaginární složka spektra jako obrázek a povrch

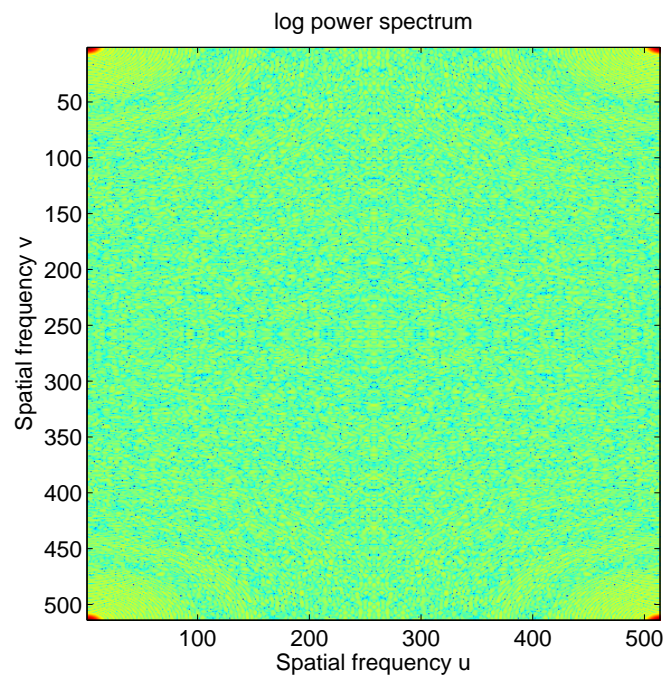


imaginární část, obrázek

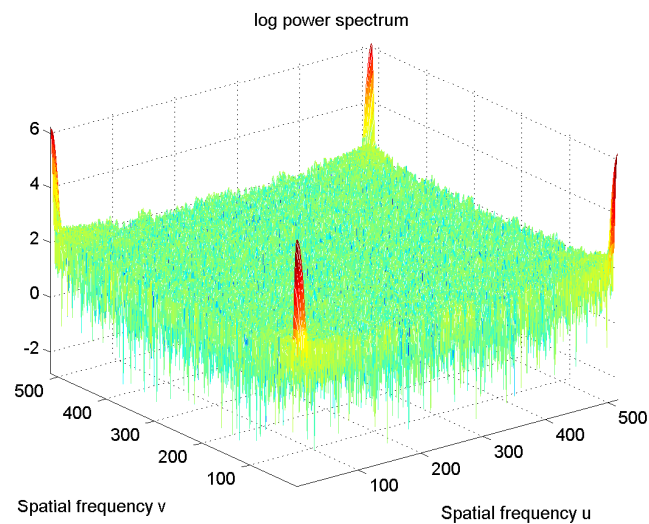


imaginární část, povrch

# Log výkonového spektra jako obrázek a povrch



obrázek

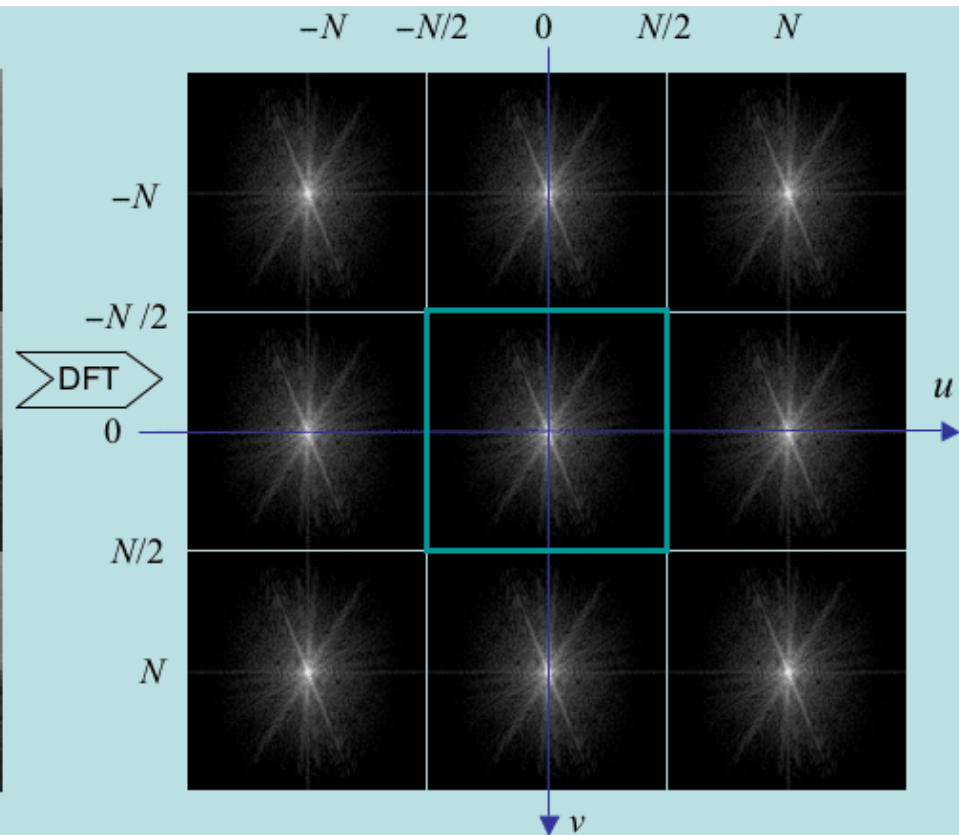


povrch

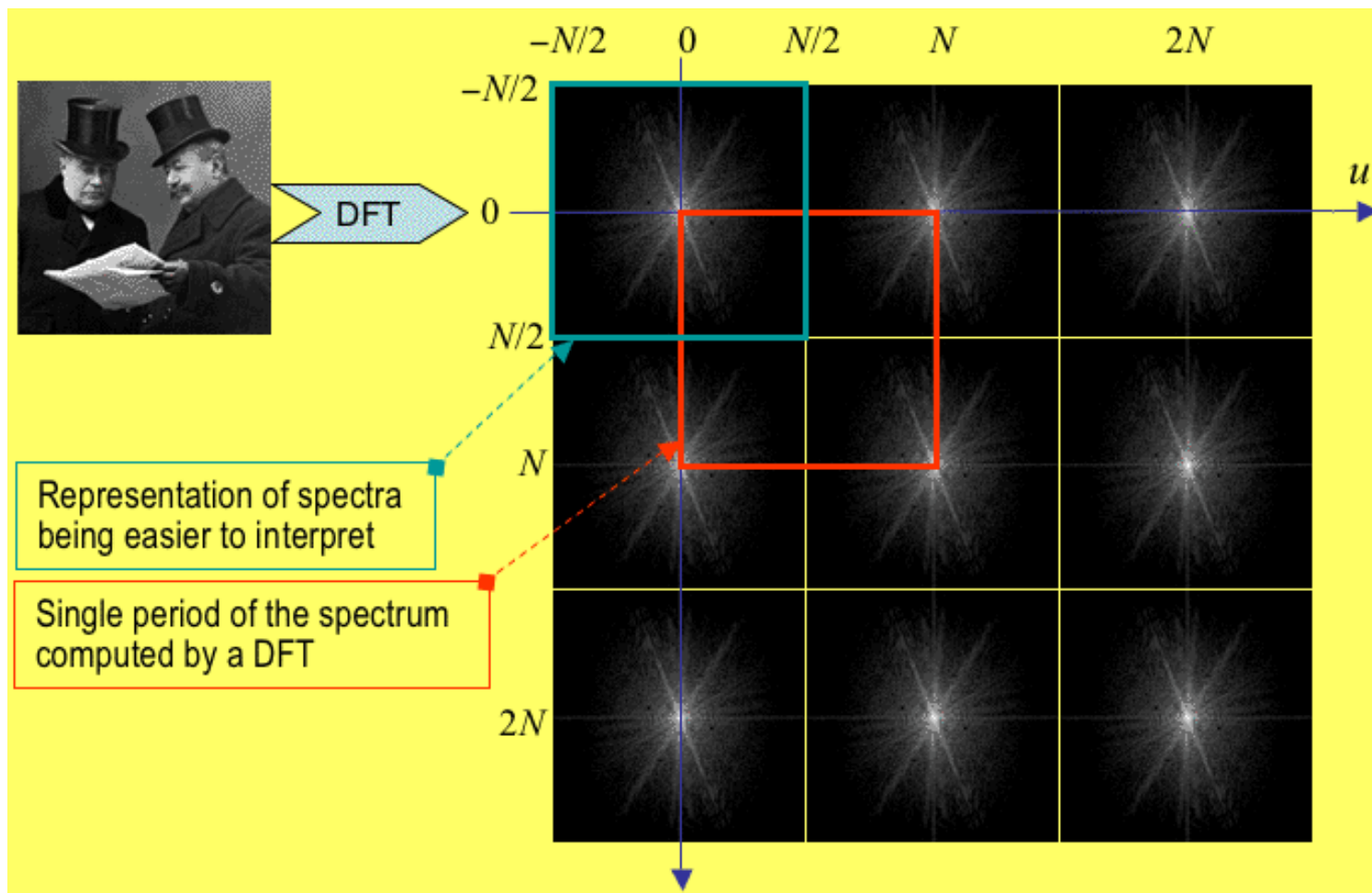
## Periodický obrázek



Spatial discontinuities caused by considering an image to be periodic

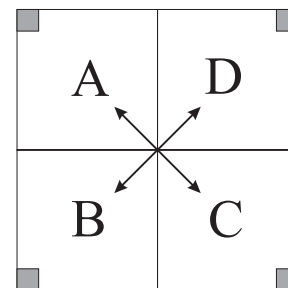


## Periodické spektrum

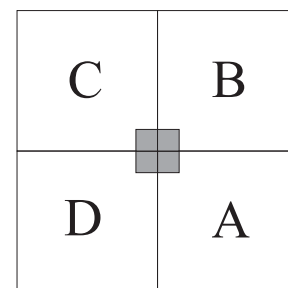


## Centrovaná spektra

- ◆ Spektrum je názorné zobrazovat centrovane, tj. s počátkem souřadnic  $(0, 0)$  ve středu spektra. Nadále tak budeme činit.
- ◆ Uvažujme výchozí spektrum rozdělené na čtyři kvadranty. Malé šedivé čtverečky odpovídají umístění nízkých frekvencí ve spektru.
- ◆ Díky symetriím spektra lze kvadranty jen prohodit podle obou diagonál. Nízké frekvence nyní jsou ve středu obrázku.
- ◆ V MATLABu je funkce `fftshift`, která převádí necentrovane  $\longleftrightarrow$  centrovane spektrum přehozením kvadrantů podle obou diagonál.

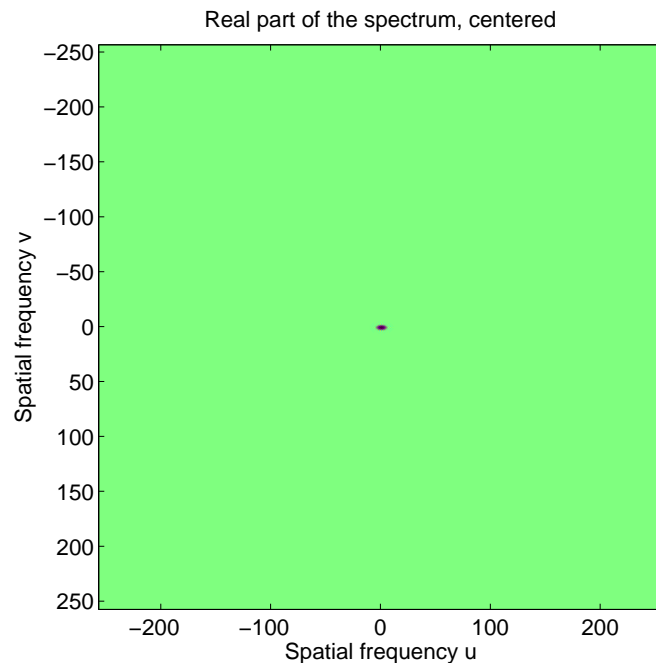


Výchozí spektrum  
nízké frekvence jsou v rozích

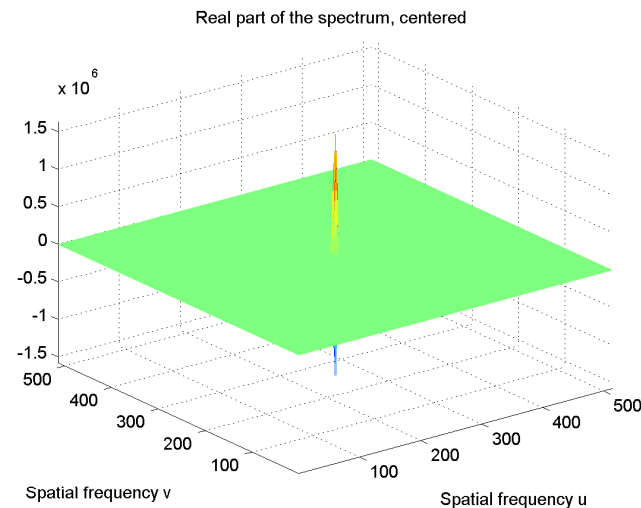


centrované spektrum  
s počátkem v  $(0, 0)$

# Reálná složka centrovaného spektra jako obrázek a povrch



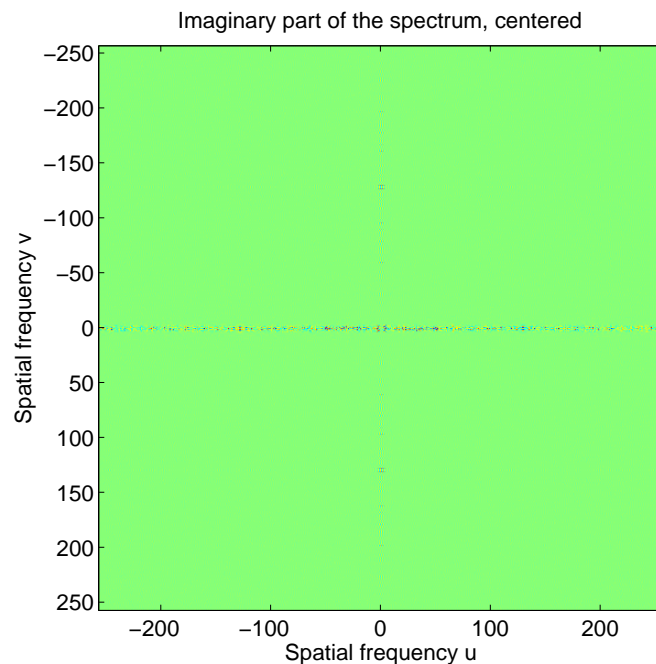
reálná část, obrázek



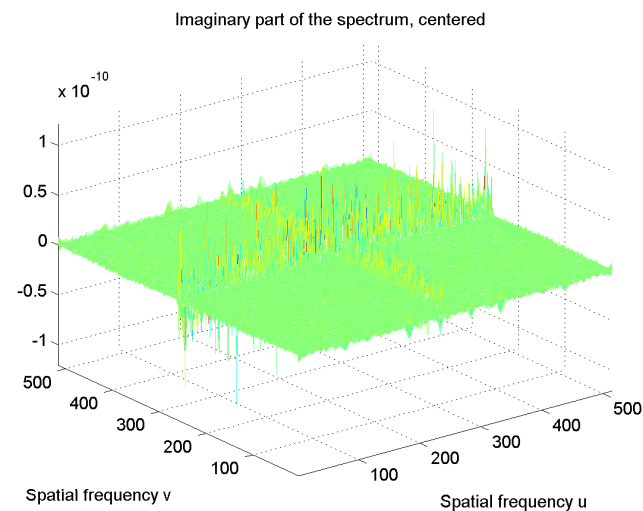
reálná část, povrch



# Imaginární složka centrovaného spektra jako obrázek a povrch



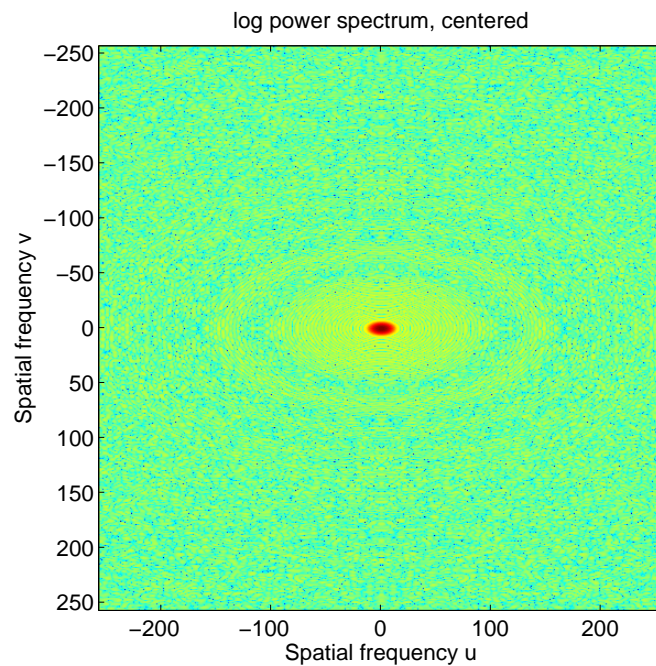
imaginární část, obrázek



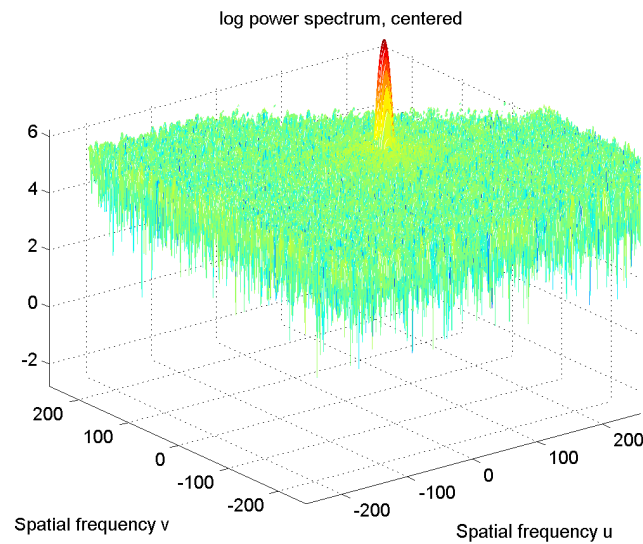
imaginární část, povrch



# Log centrovaného výkonového spektra jako obrázek a povrch

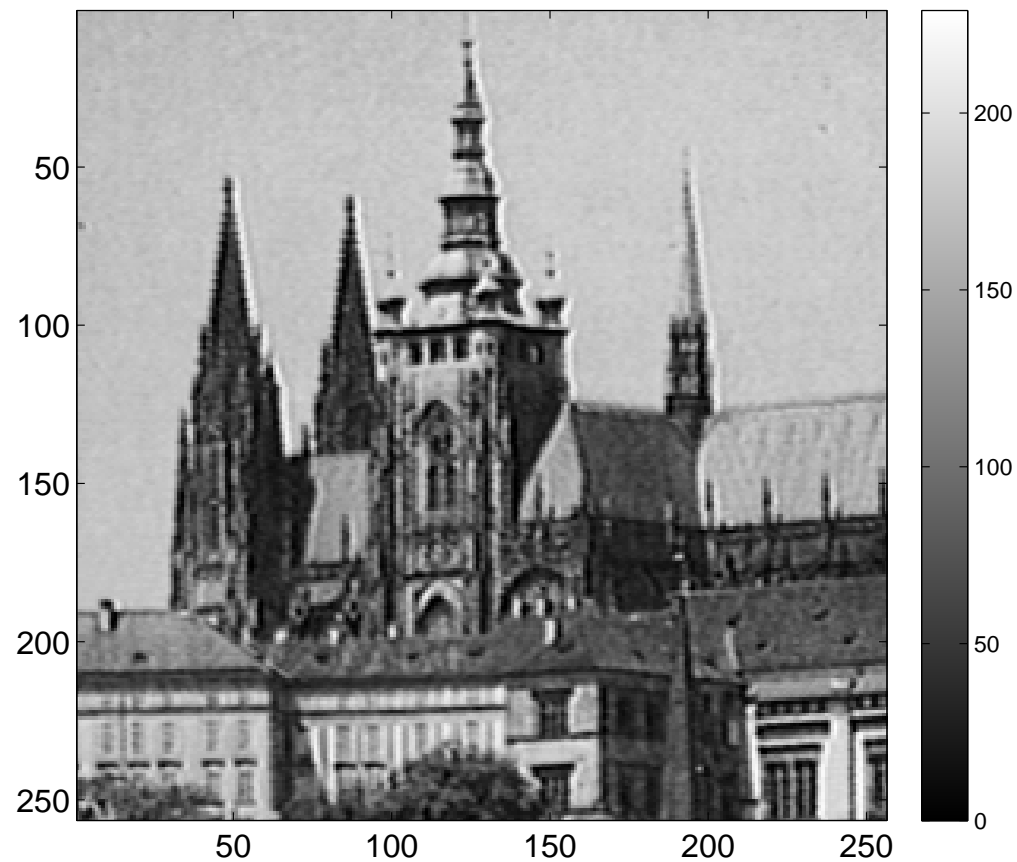


obrázek

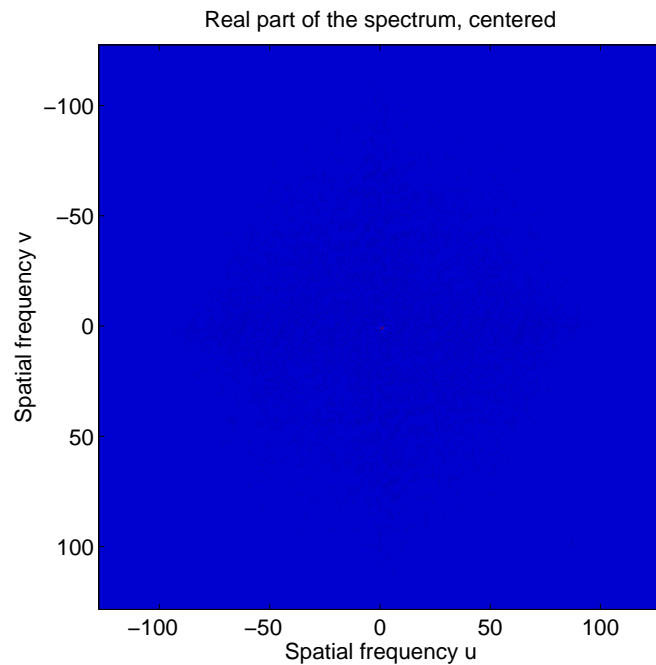


povrch

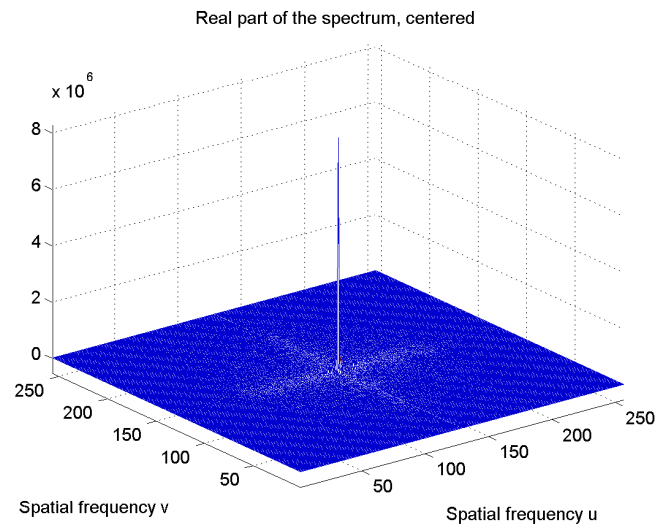
## Příklad Hradčany, výchozí obraz $265 \times 256$



# Reálná složka centrovaného spektra jako obrázek a povrch

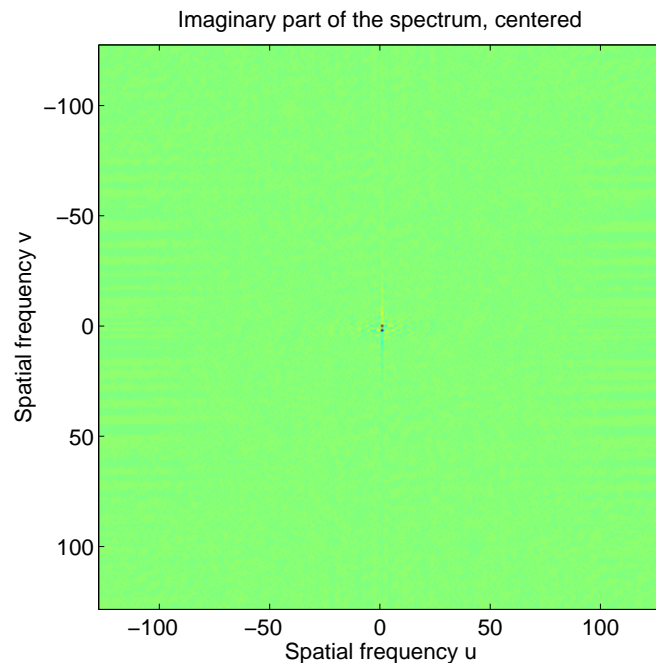


reálná část, obrázek

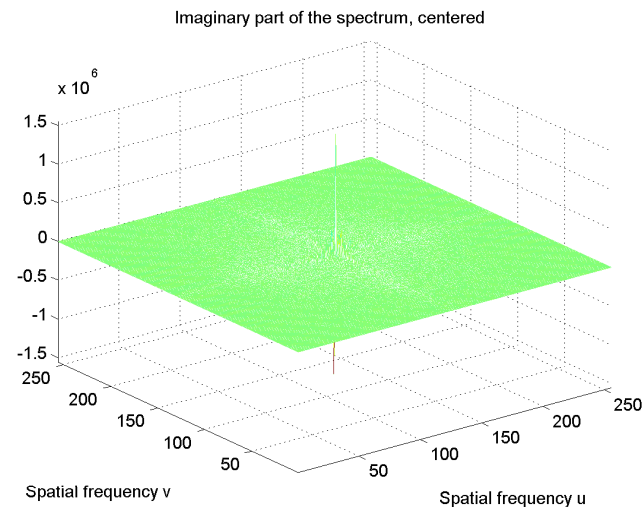


reálná část, povrch

# Imaginární složka centrovaného spektra jako obrázek a povrch

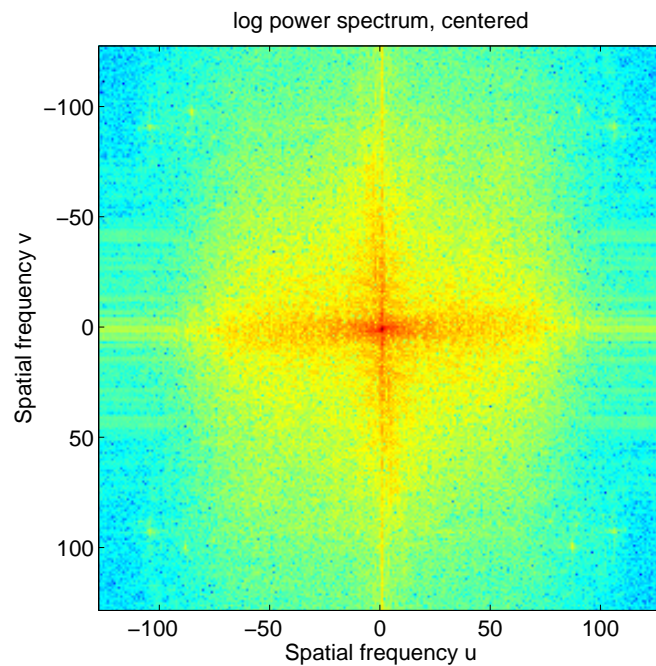


imaginární část, obrázek

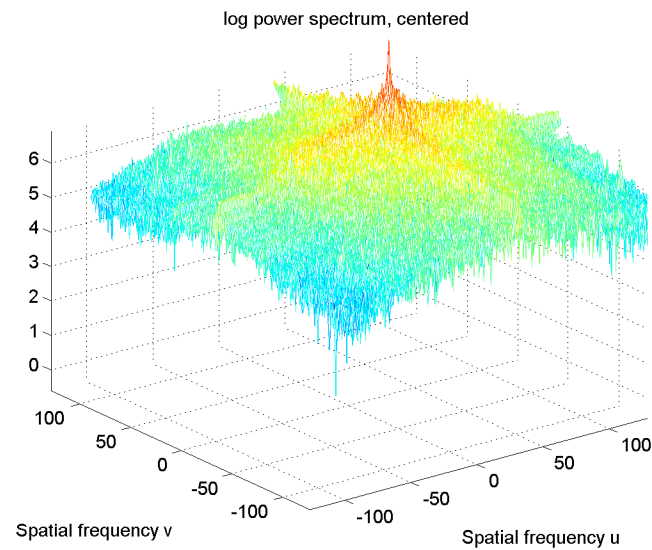


imaginární část, povrch

# Log centrovaného výkonového spektra jako obrázek a povrch

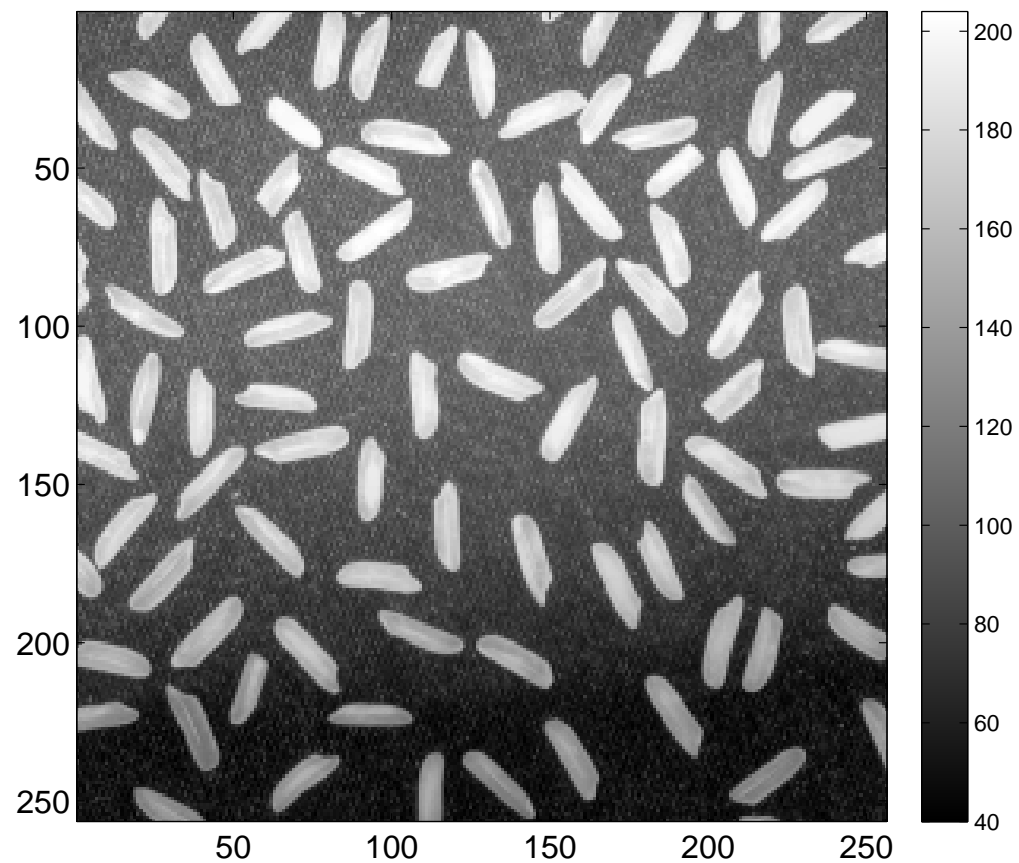


obrázek

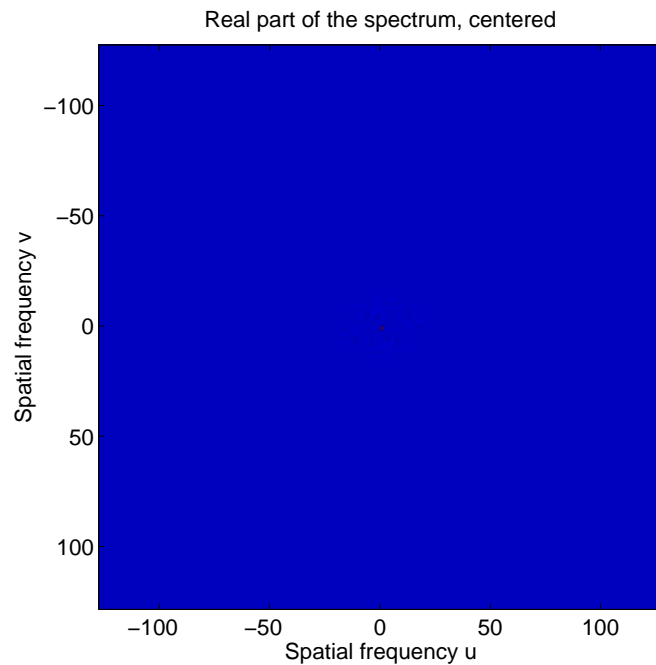


povrch

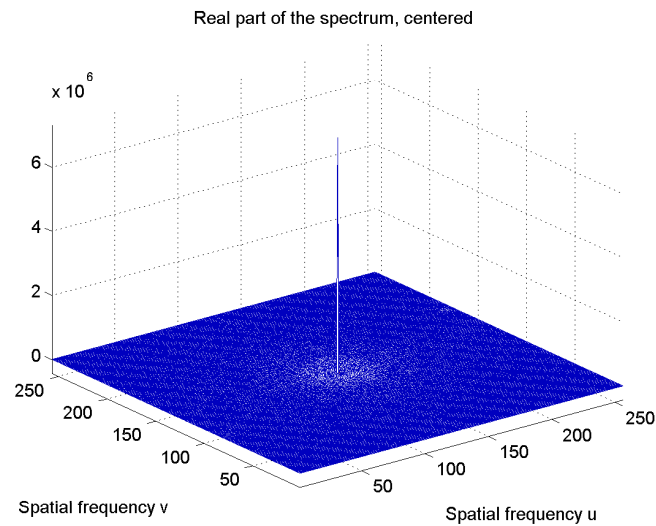
## Příklad rýže, výchozí obraz $265 \times 256$



# Reálná složka centrovaného spektra jako obrázek a povrch

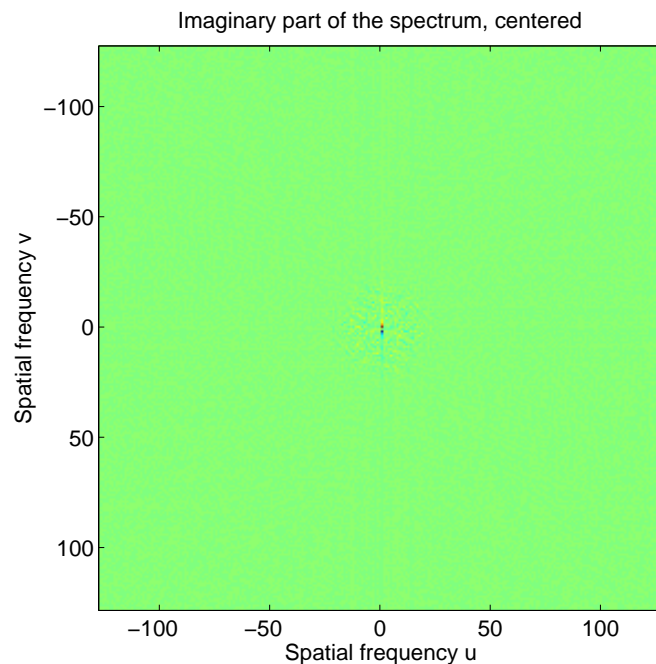


reálná část, obrázek

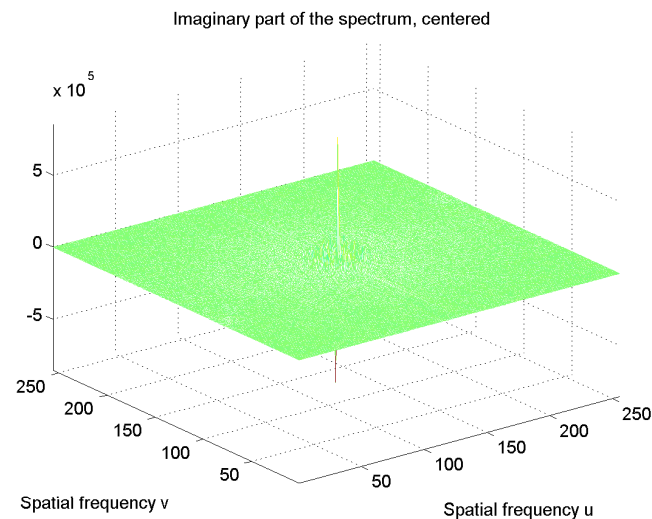


reálná část, povrch

# Imaginární složka centrovaného spektra jako obrázek a povrch



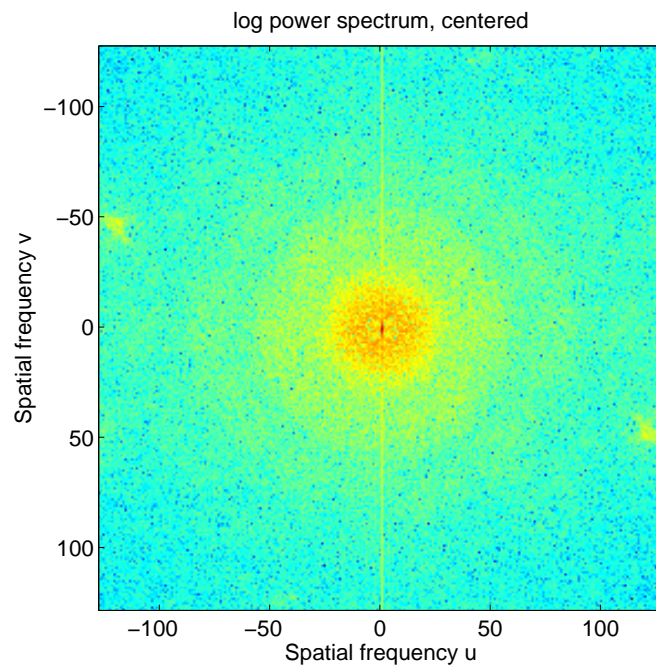
imaginární část, obrázek



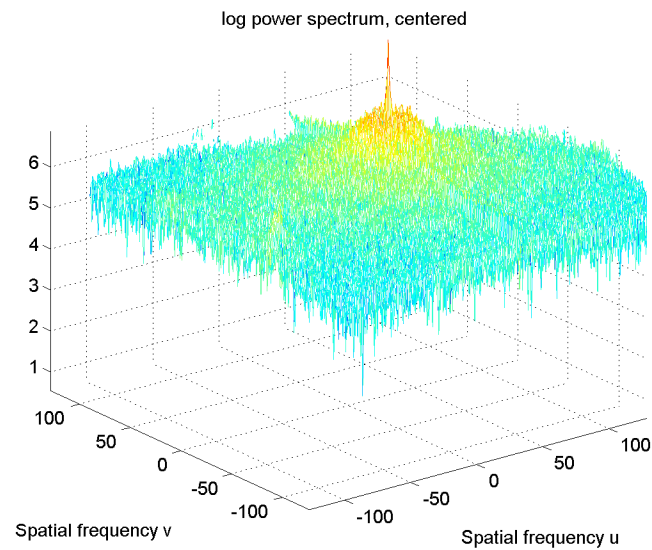
imaginární část, povrch



# Log centrovaného výkonového spektra jako obrázek a povrch

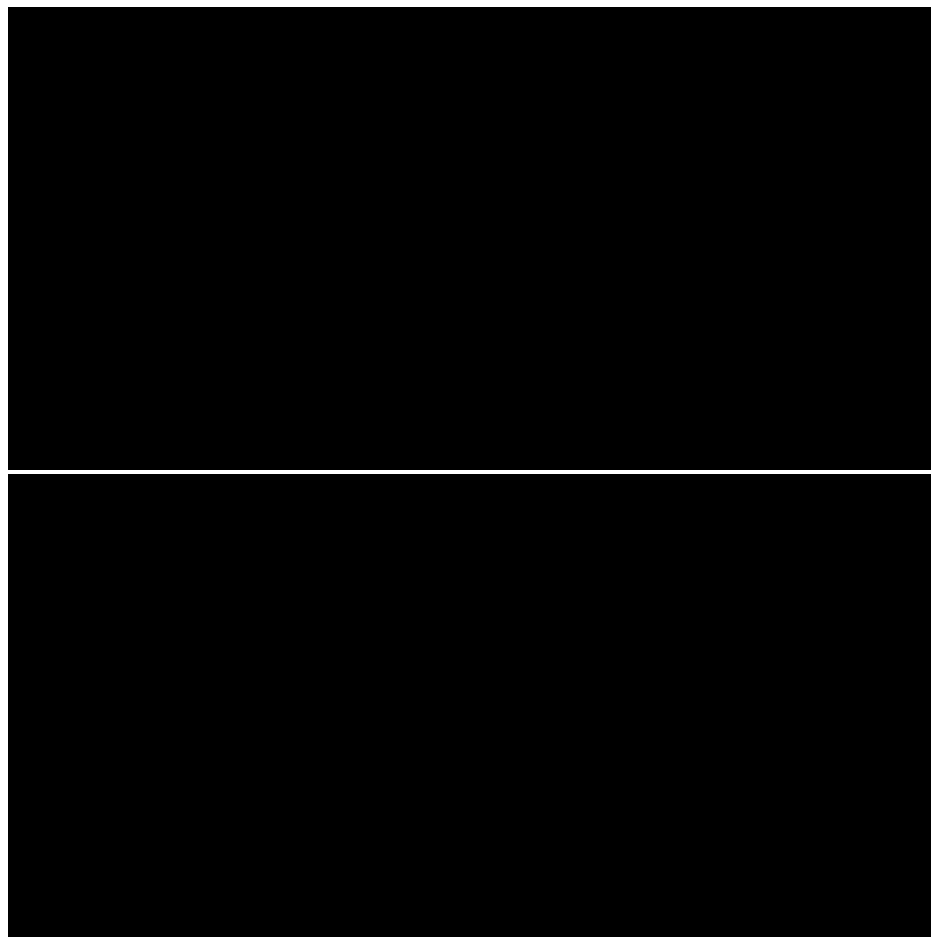


obrázek

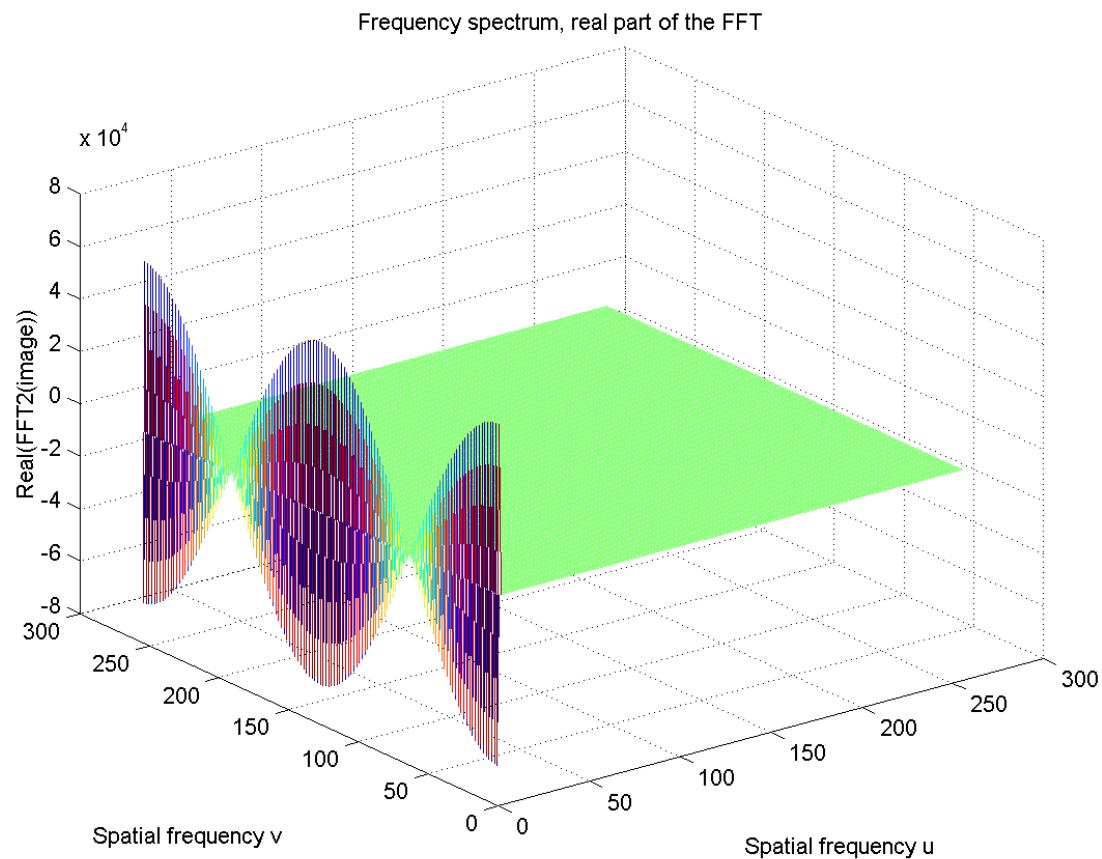


povrch

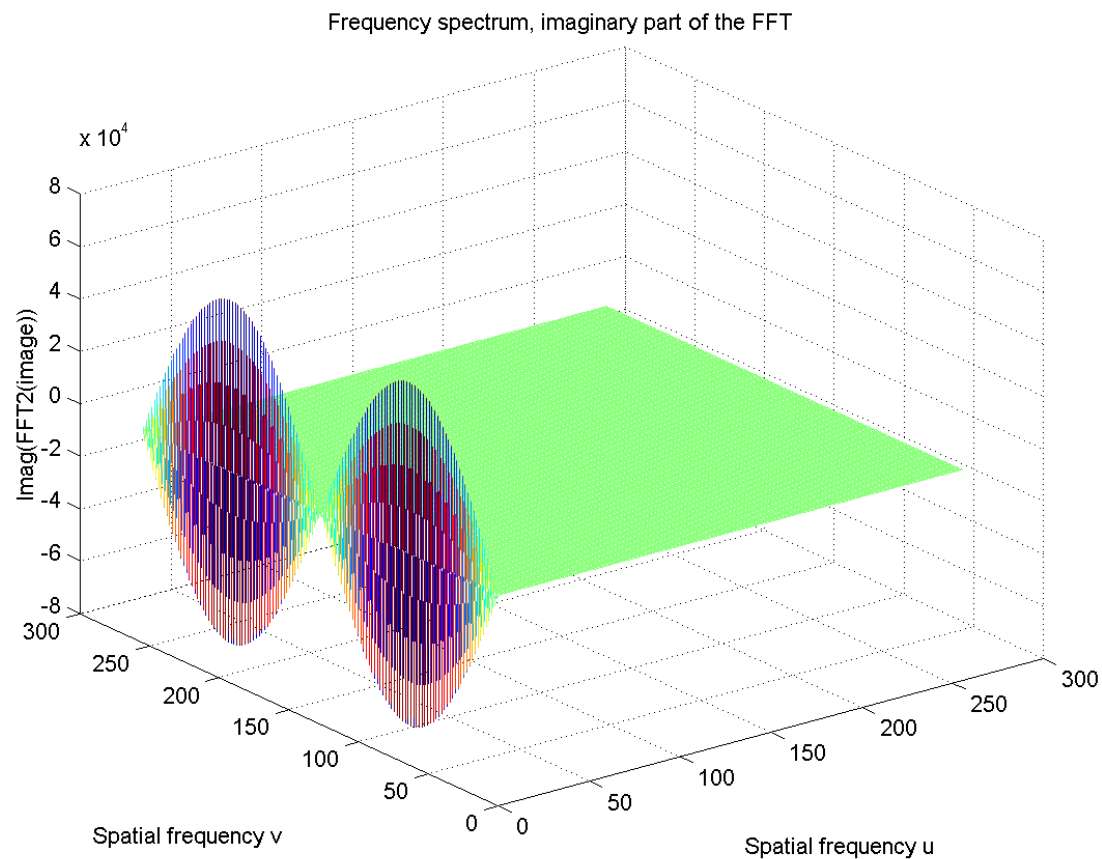
## Příklad vodorovná čára, výchozí obraz $265 \times 256$



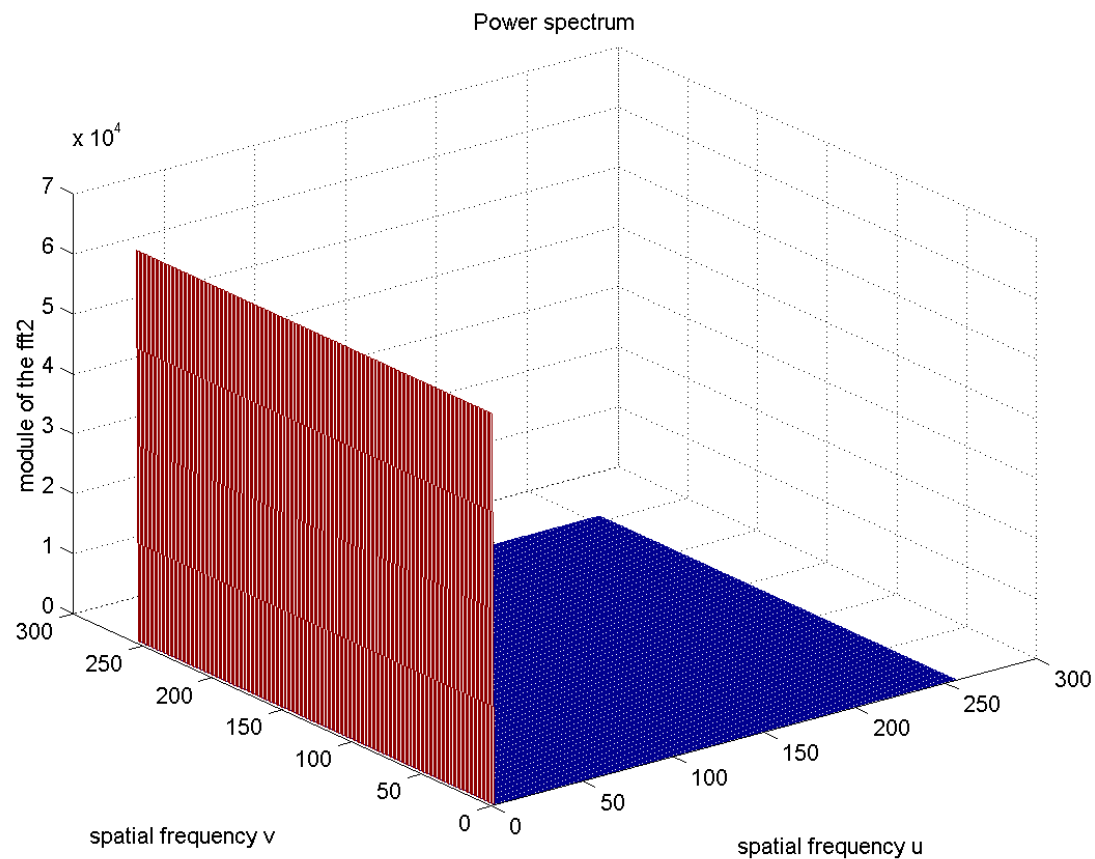
# Příklad vodorovná čára, reálná složka spektra



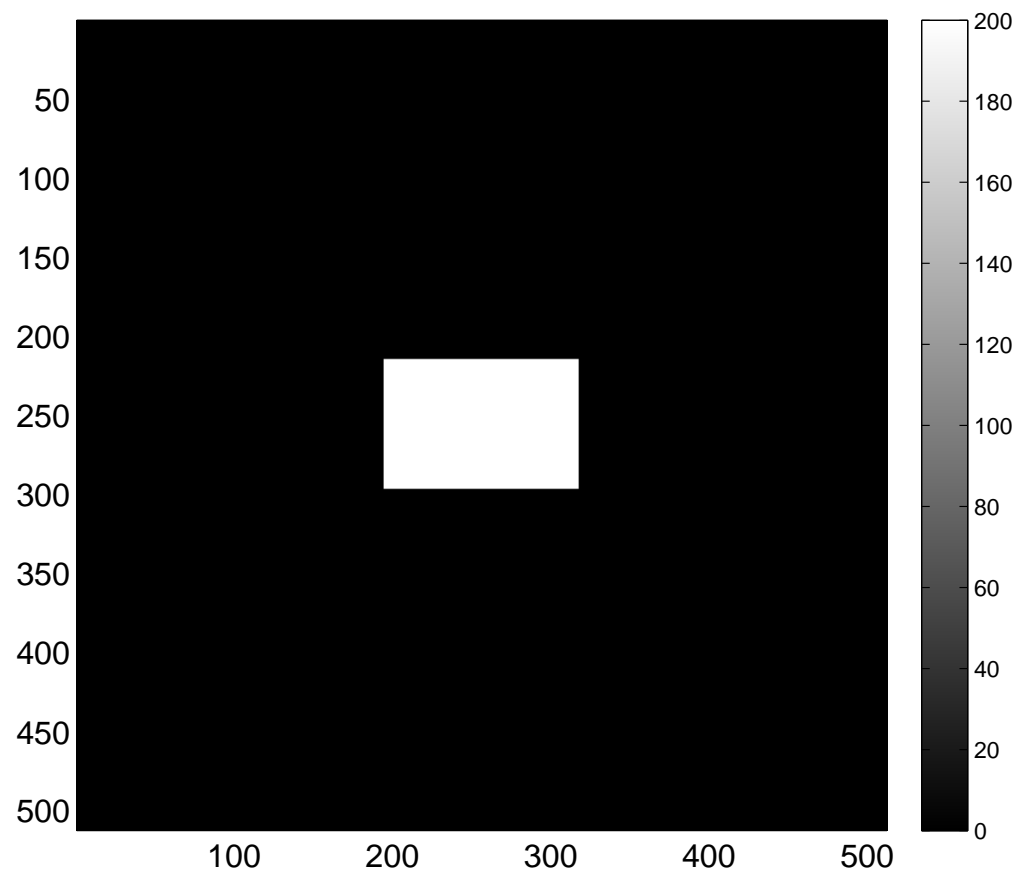
# Příklad vodorovná čára, imaginární složka spektra



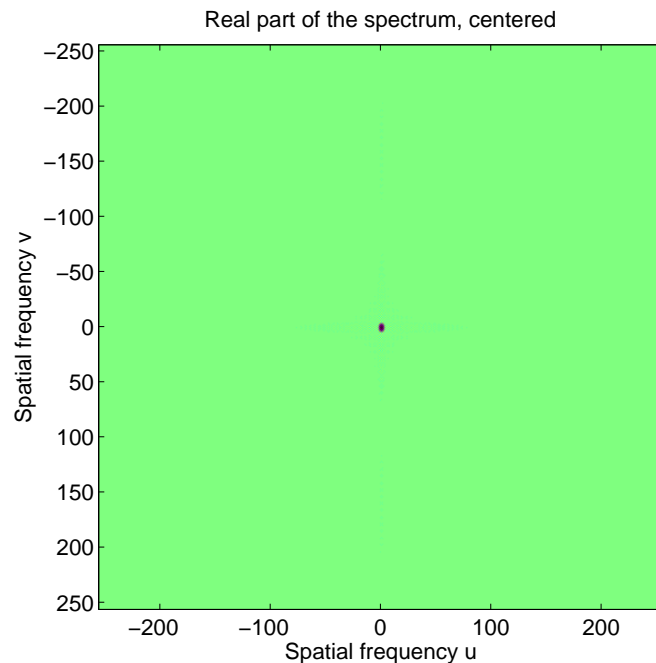
# Příklad vodorovná čára, výkonové spektrum



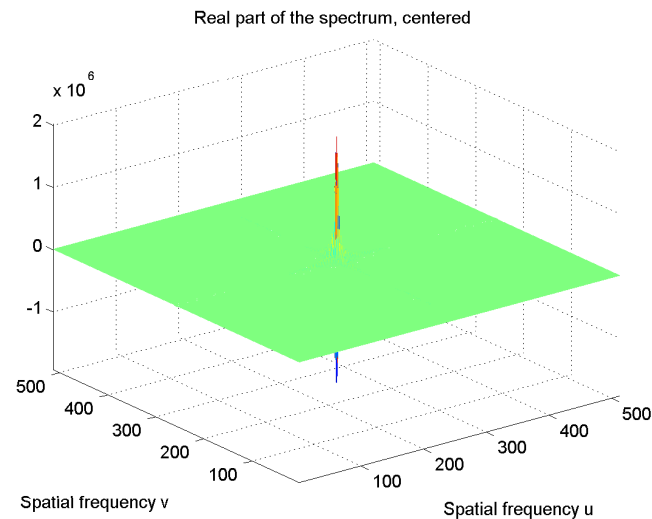
## Příklad obdélník, výchozí obraz $512 \times 512$



# Reálná složka centrovaného spektra jako obrázek a povrch

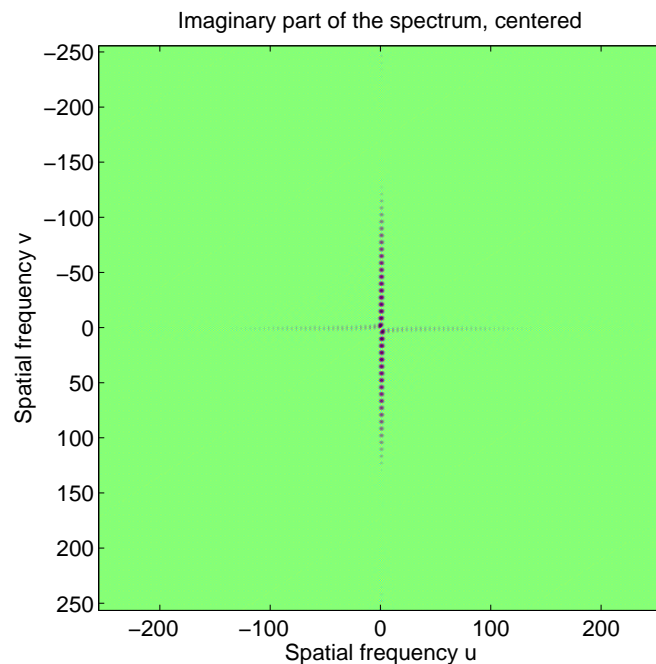


reálná část, obrázek

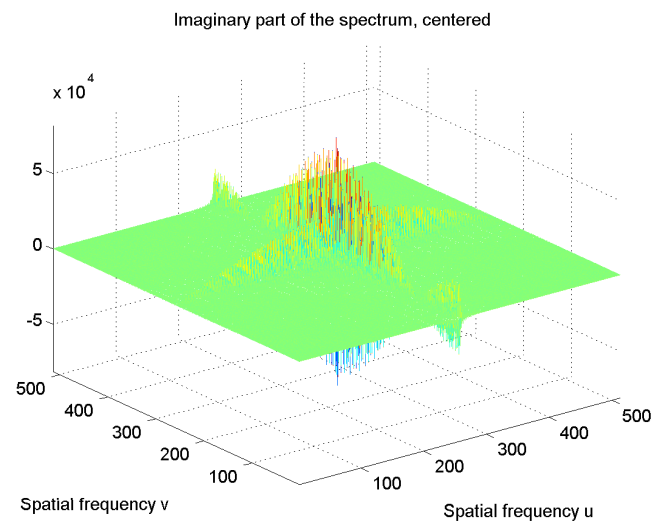


reálná část, povrch

# Imaginární složka centrovaného spektra jako obrázek a povrch



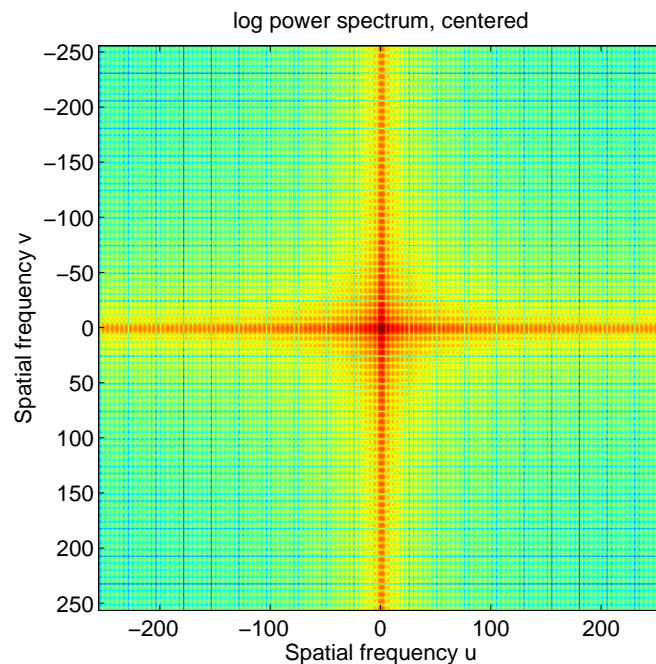
imaginární část, obrázek



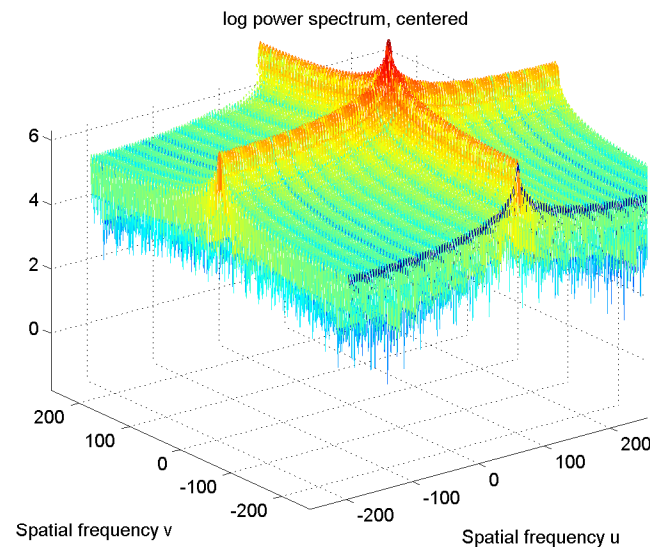
imaginární část, povrch



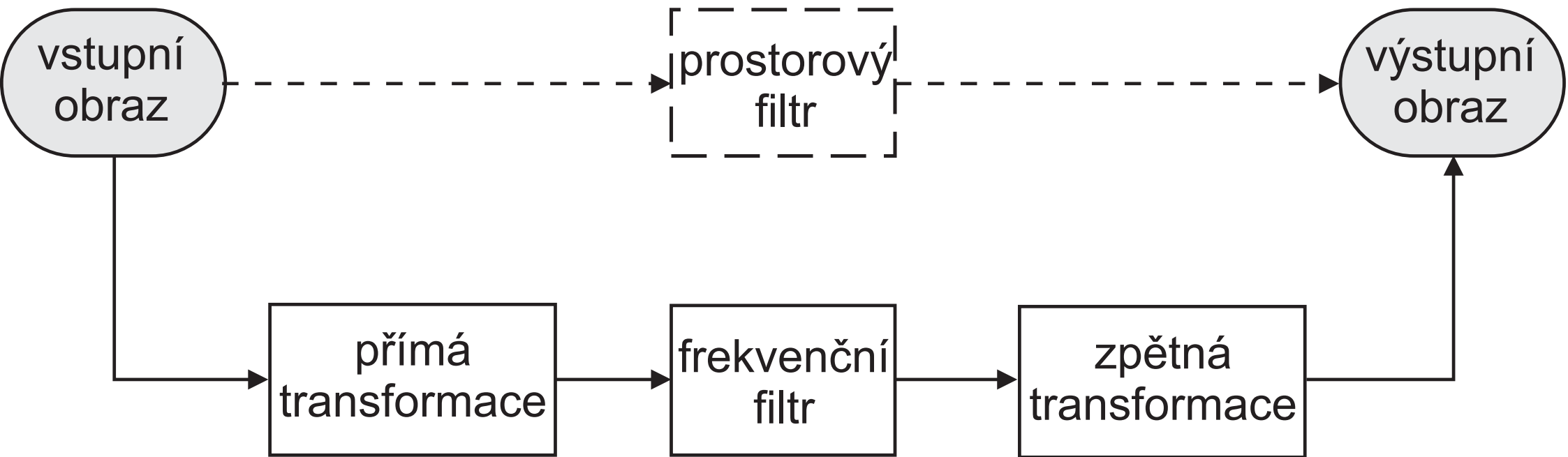
# Log centrovaného výkonového spektra jako obrázek a povrch



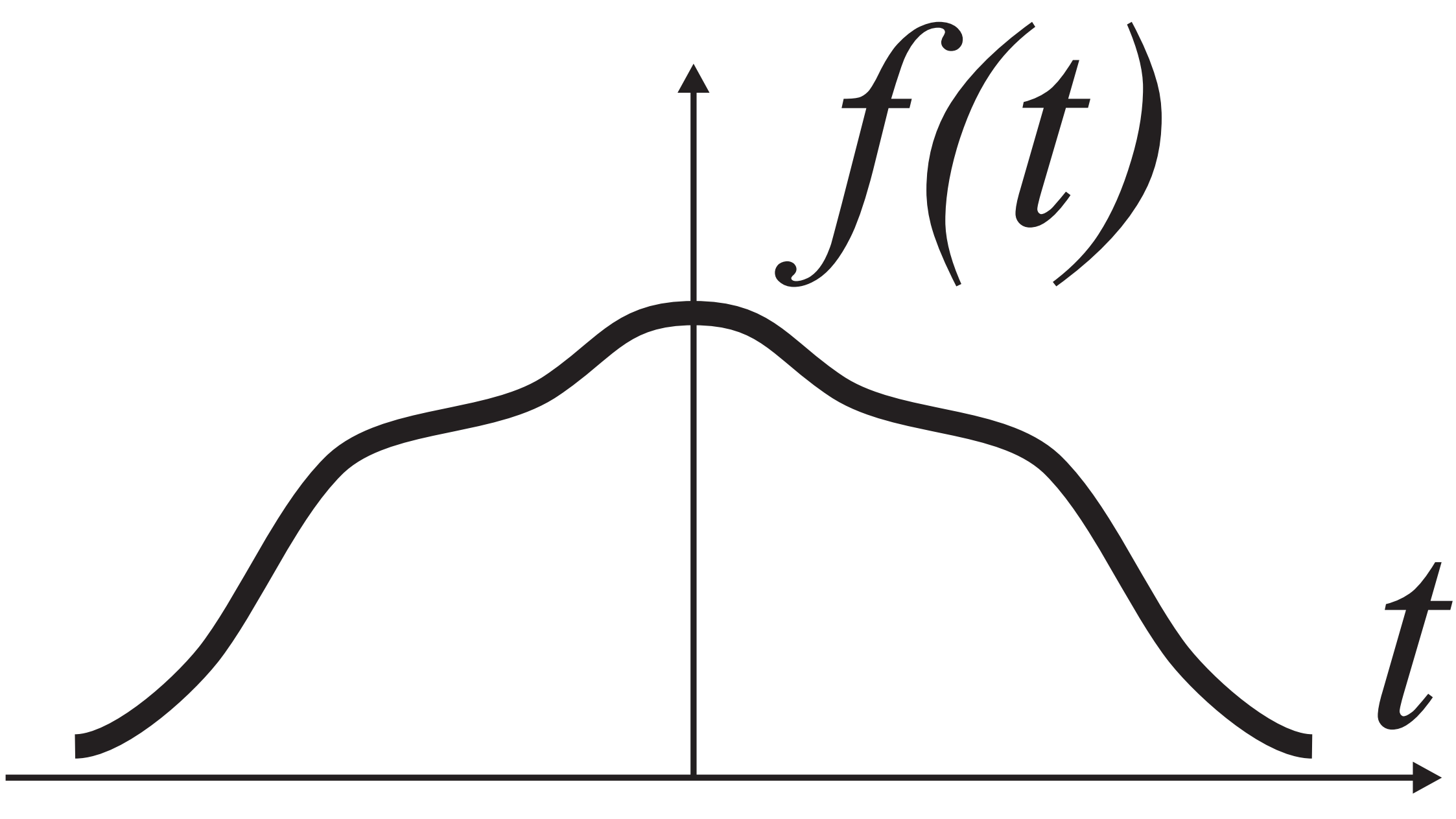
obrázek

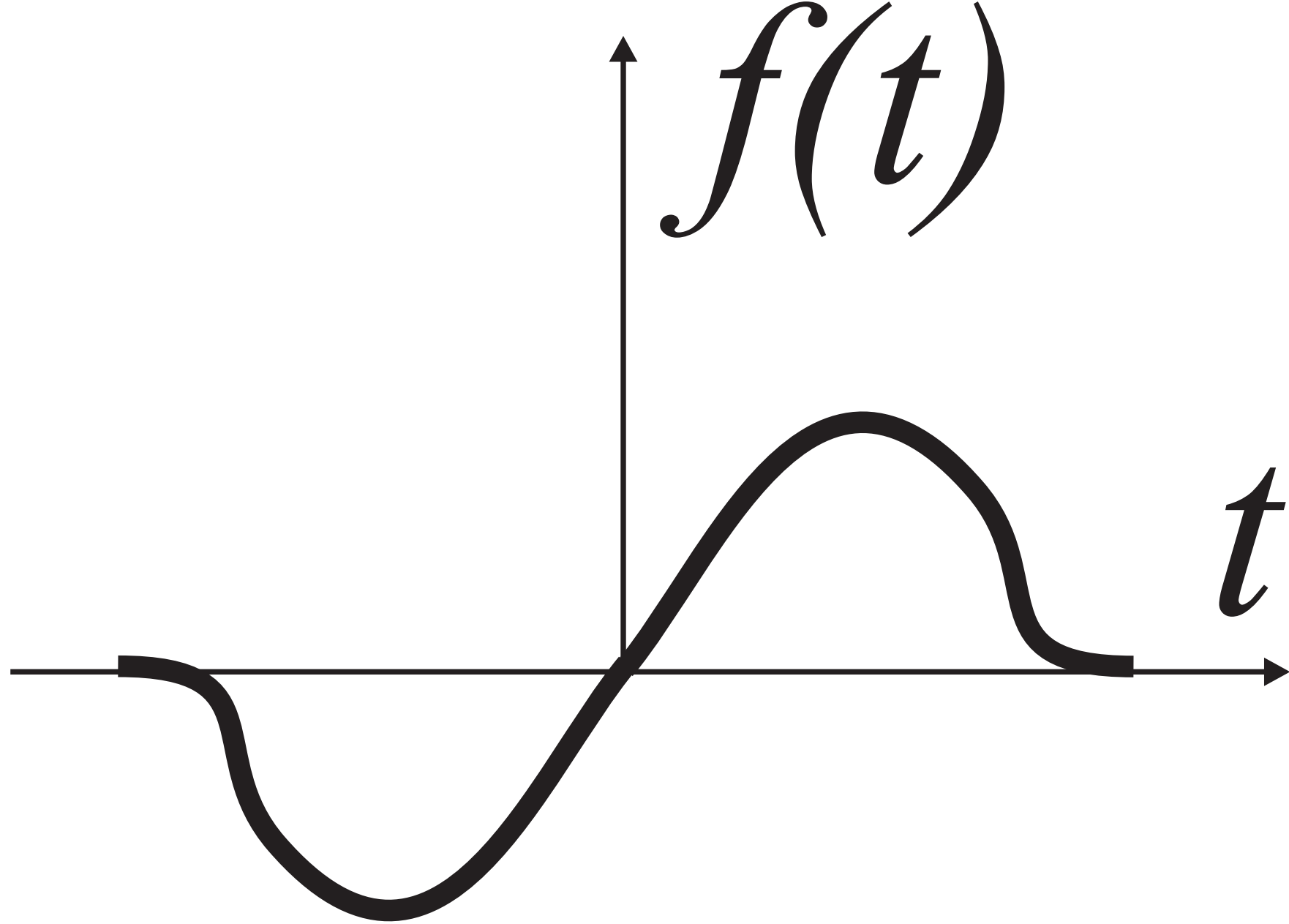


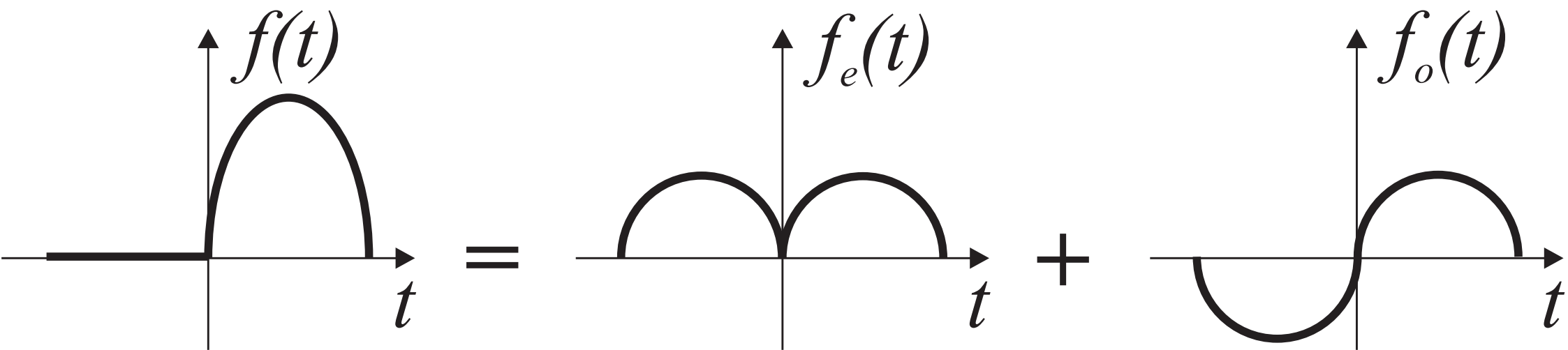
povrch



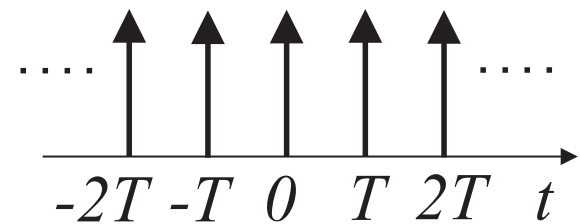
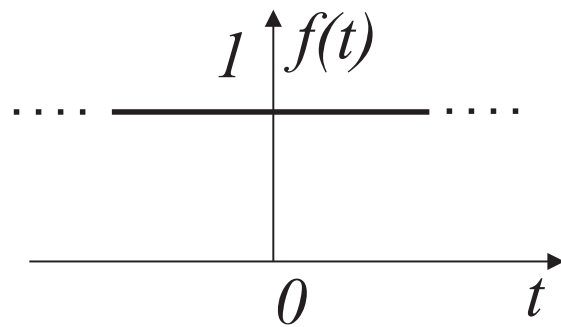
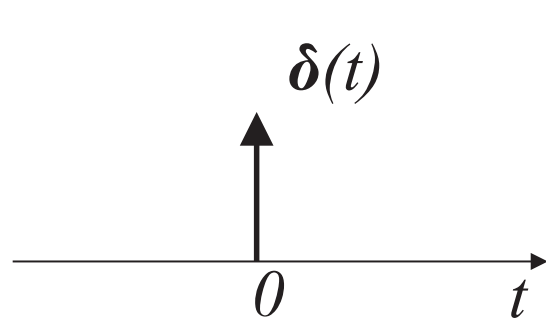




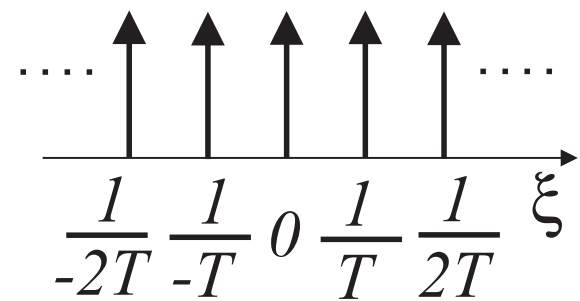
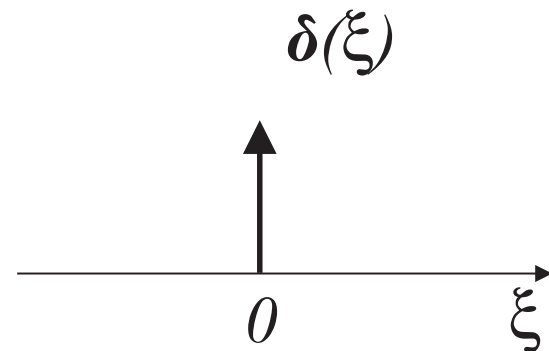
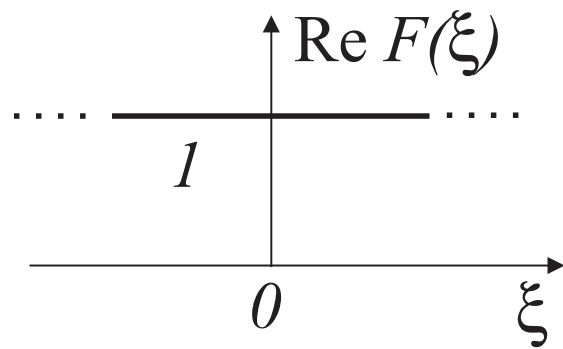


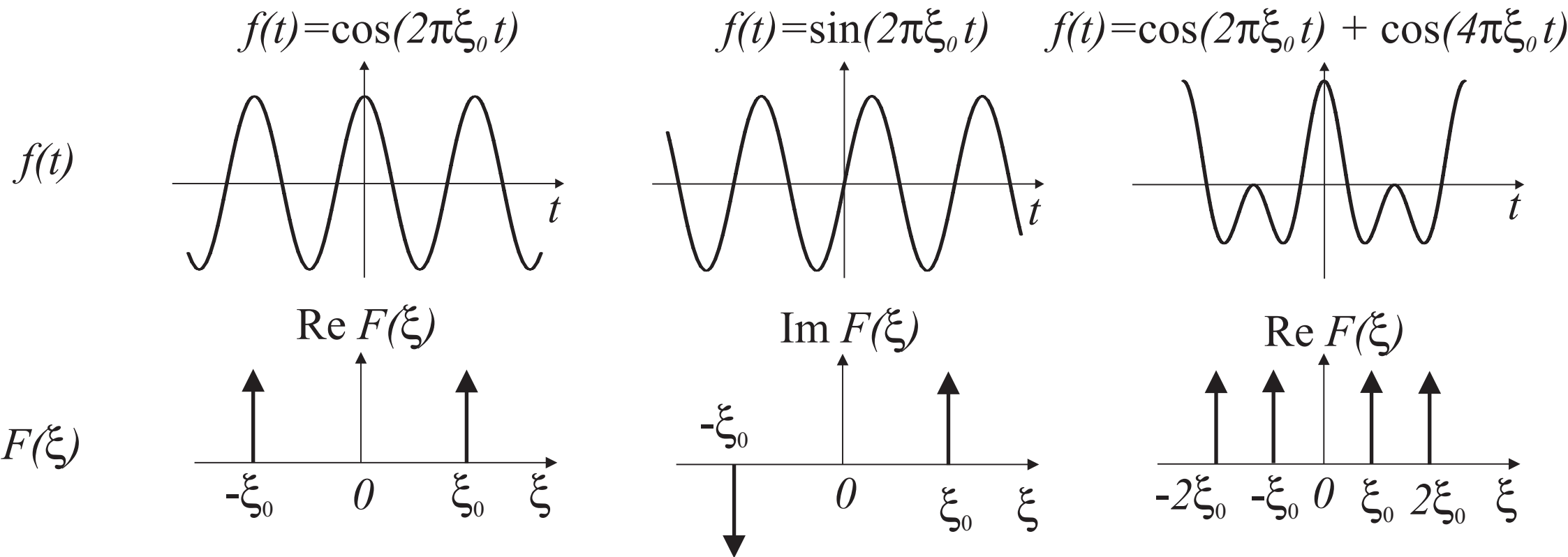


$f(t)$



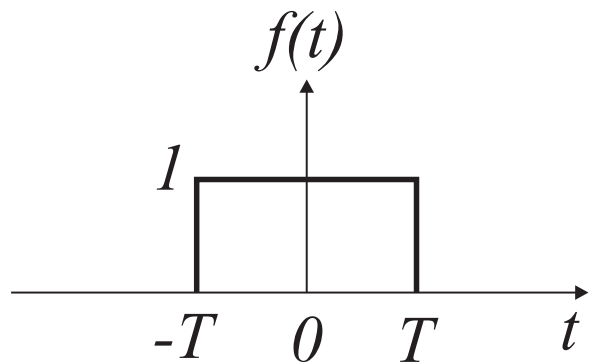
$F(\xi)$



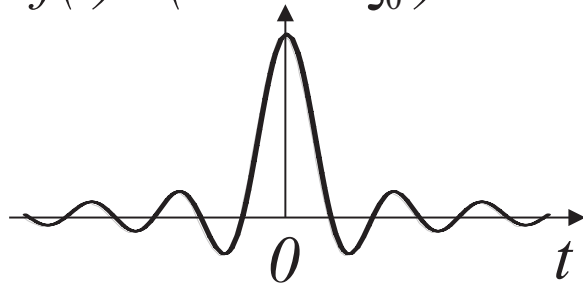




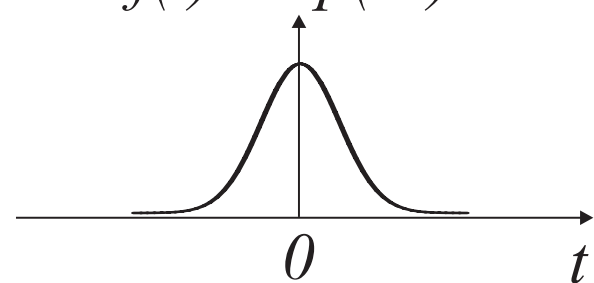
$f(t)$



$$f(t) = (\sin 2\pi\xi_0 t) / \pi t$$

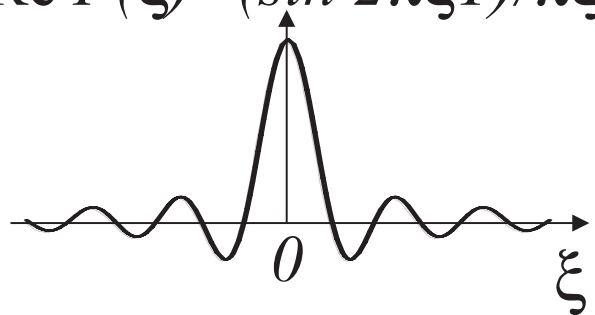


$$f(t) = \exp(-t^2)$$

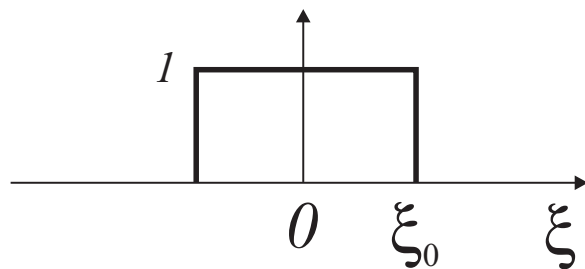


$$\operatorname{Re} F(\xi) = (\sin 2\pi\xi T) / \pi\xi$$

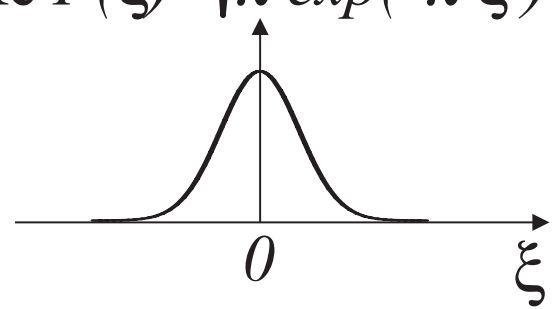
$F(\xi)$

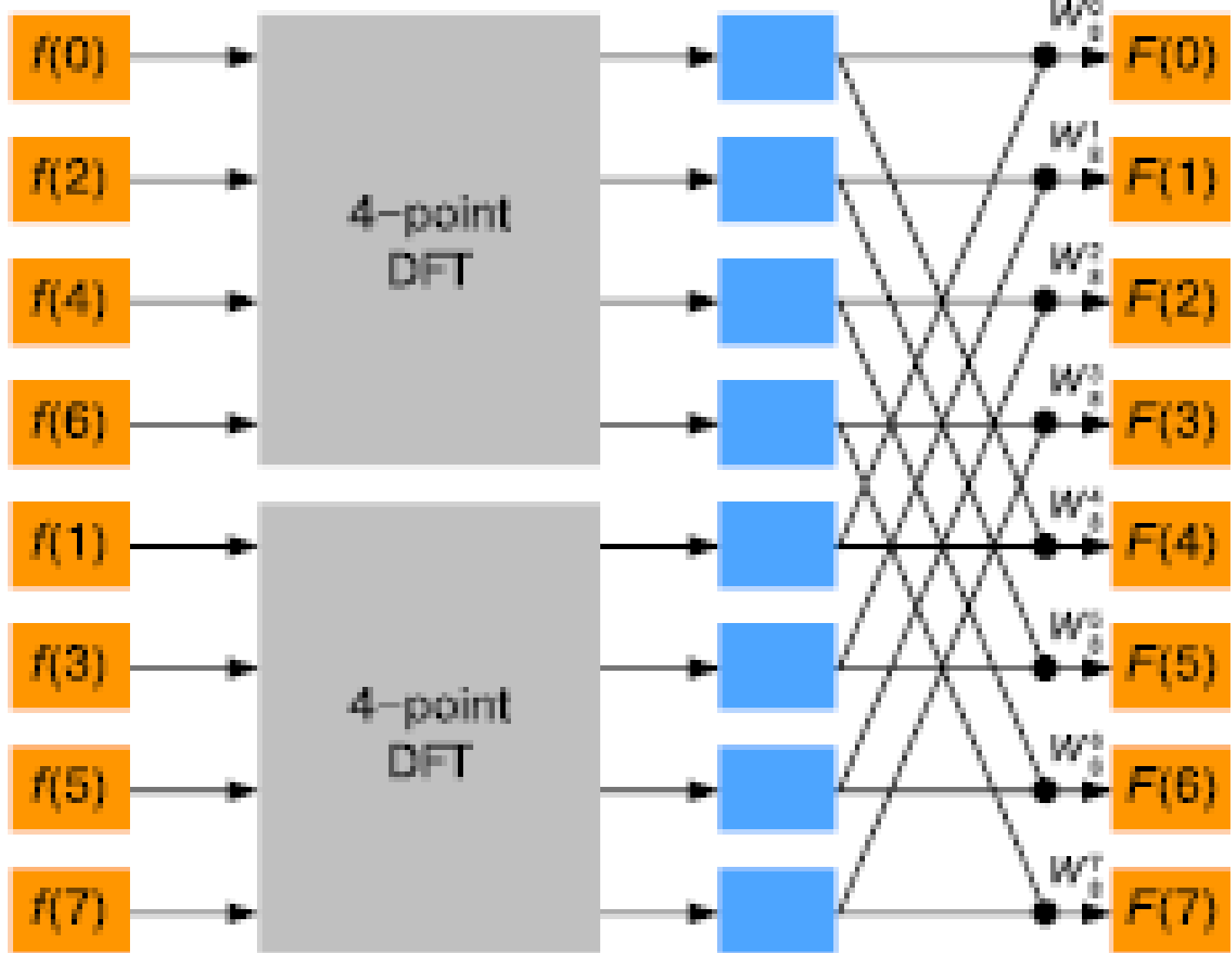


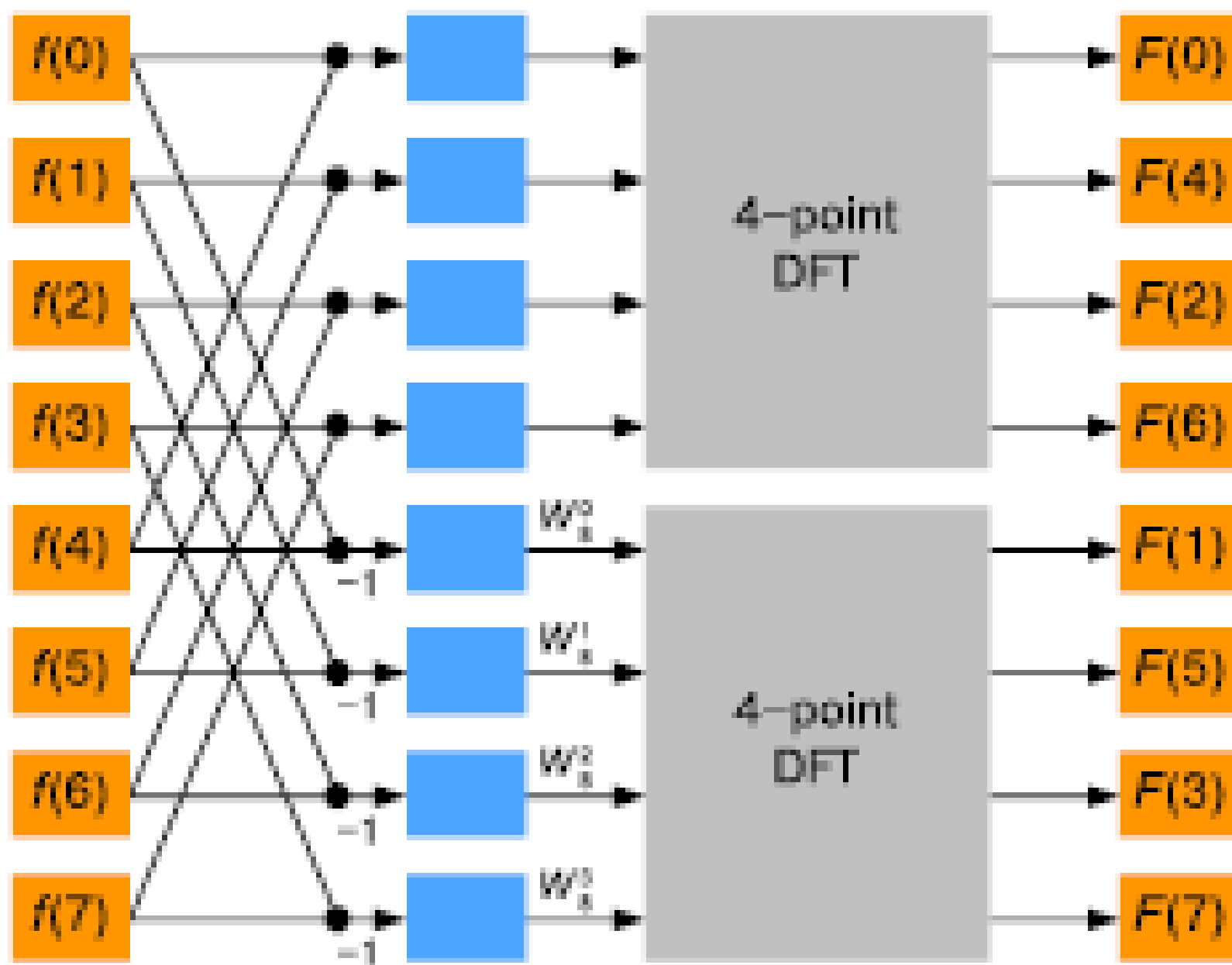
$$\operatorname{Re} F(\xi)$$



$$\operatorname{Re} F(\xi) = \sqrt{\pi} \exp(-\pi^2 \xi^2)$$





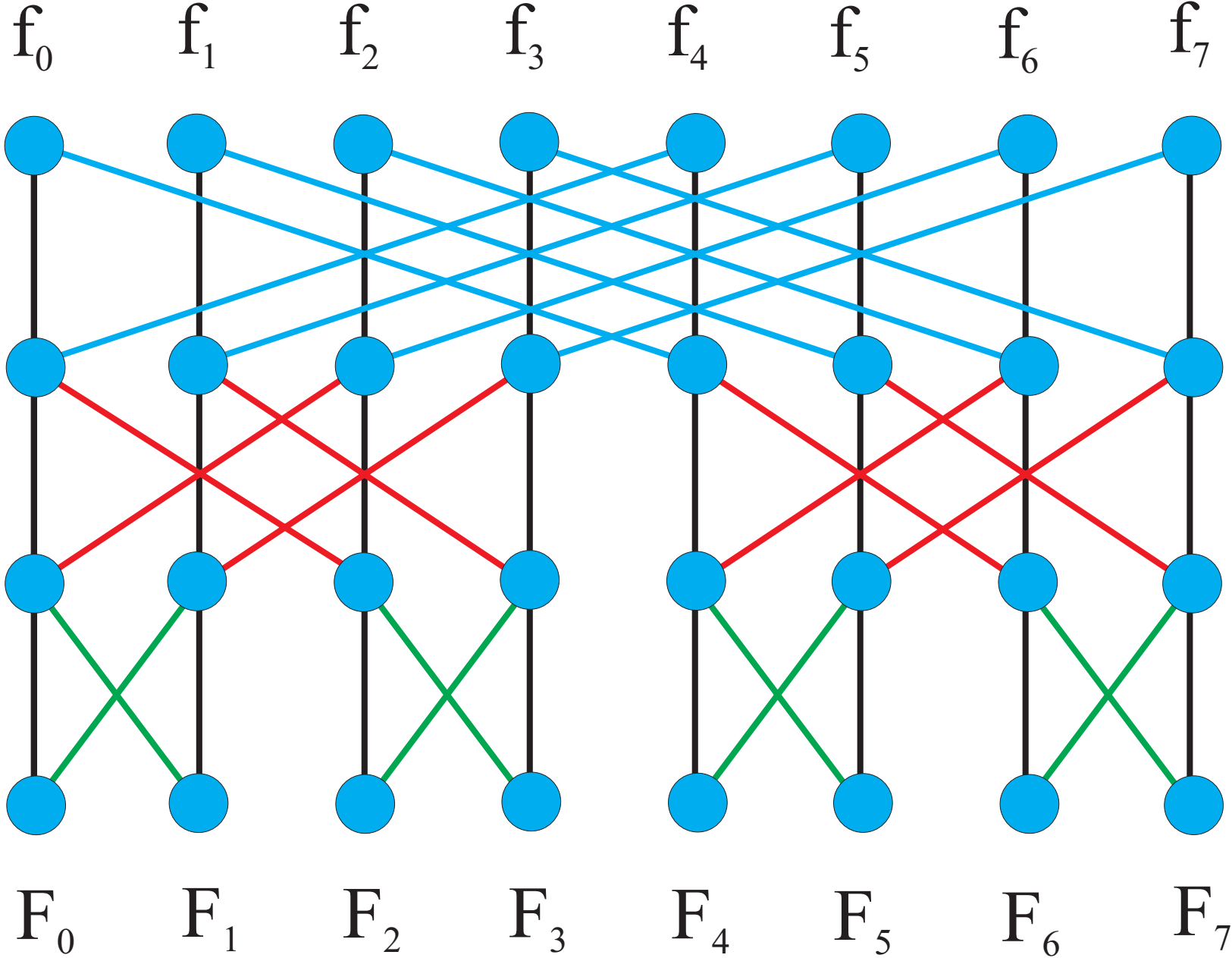


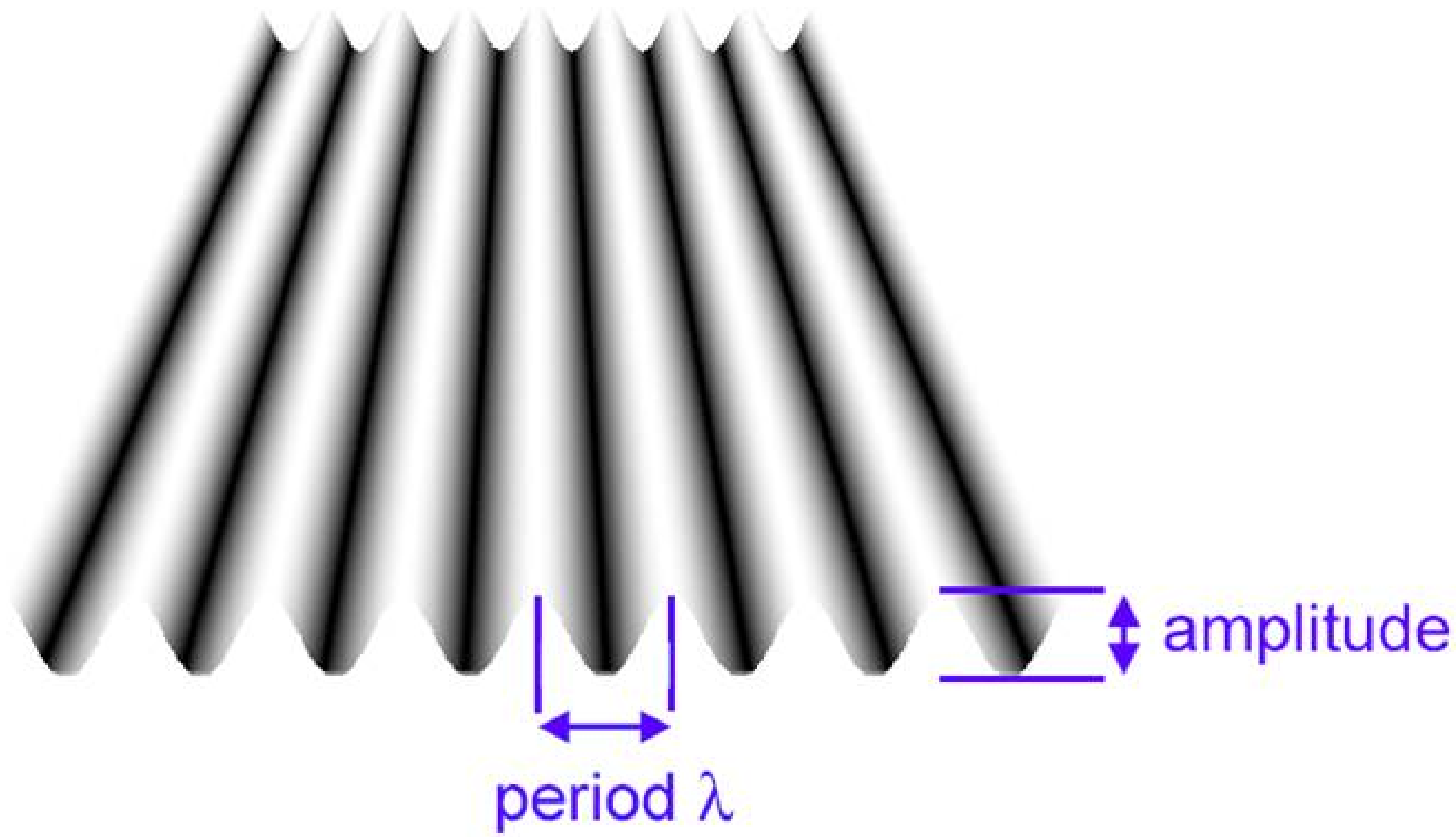
Iteration

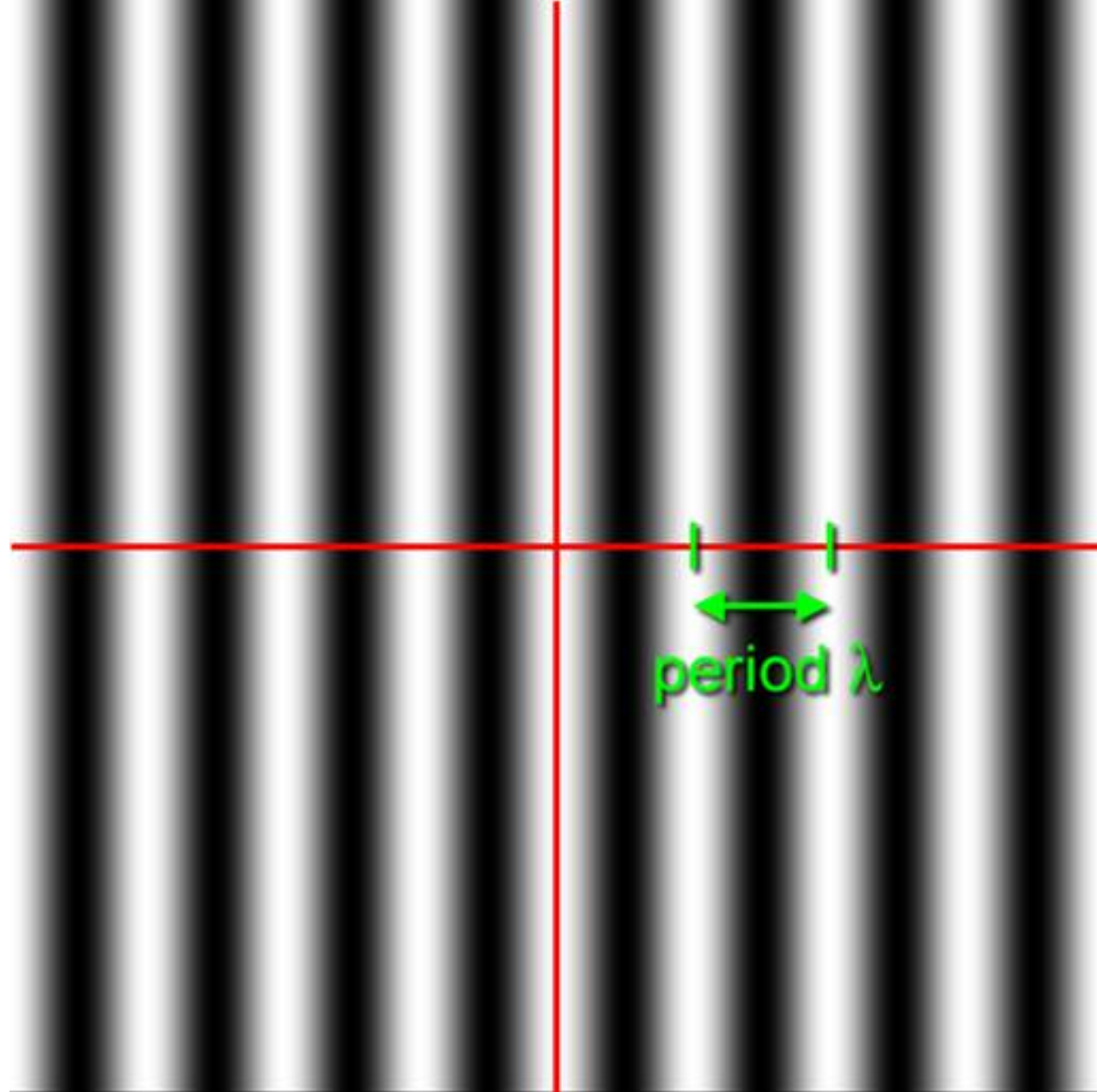
1

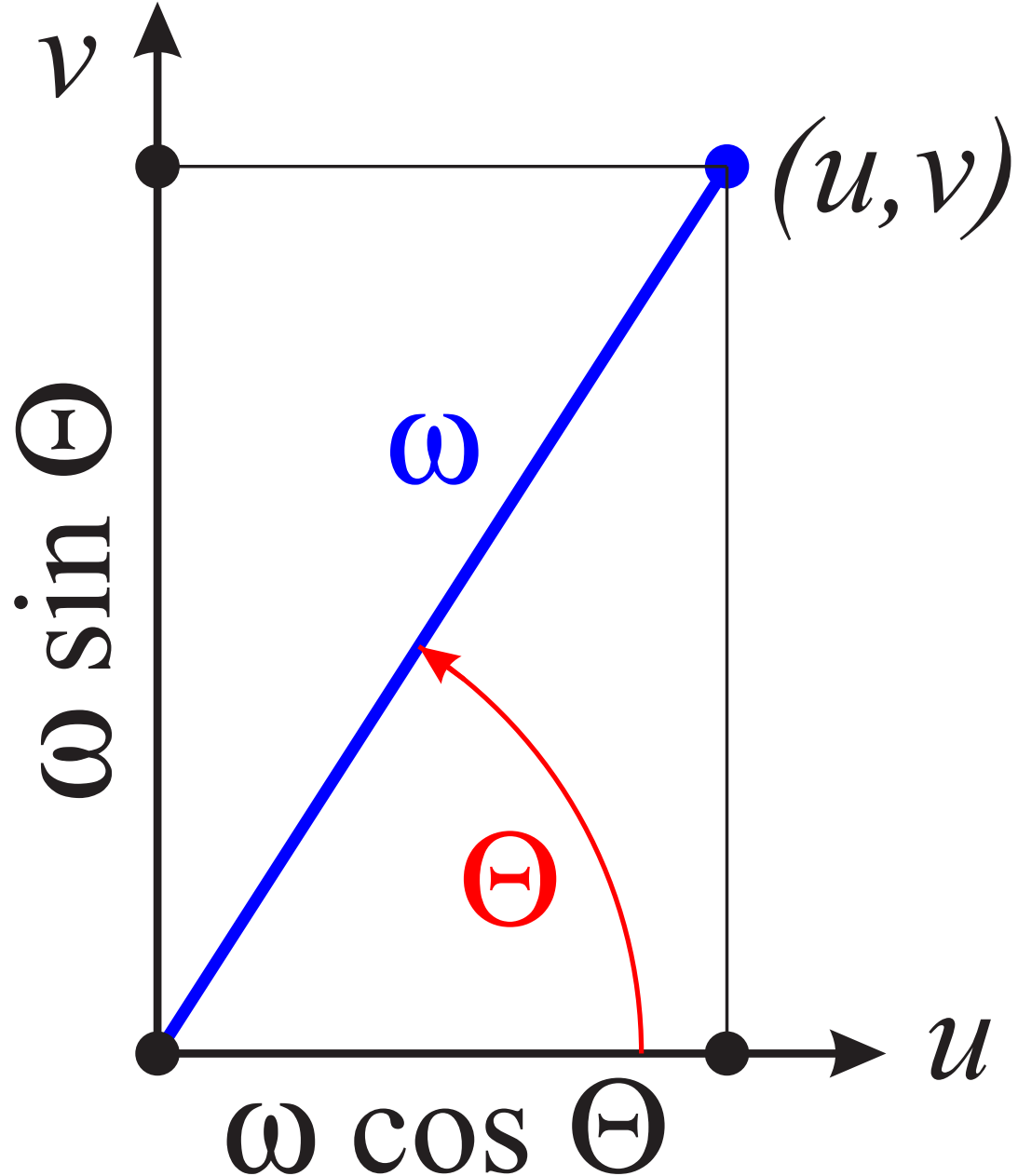
2

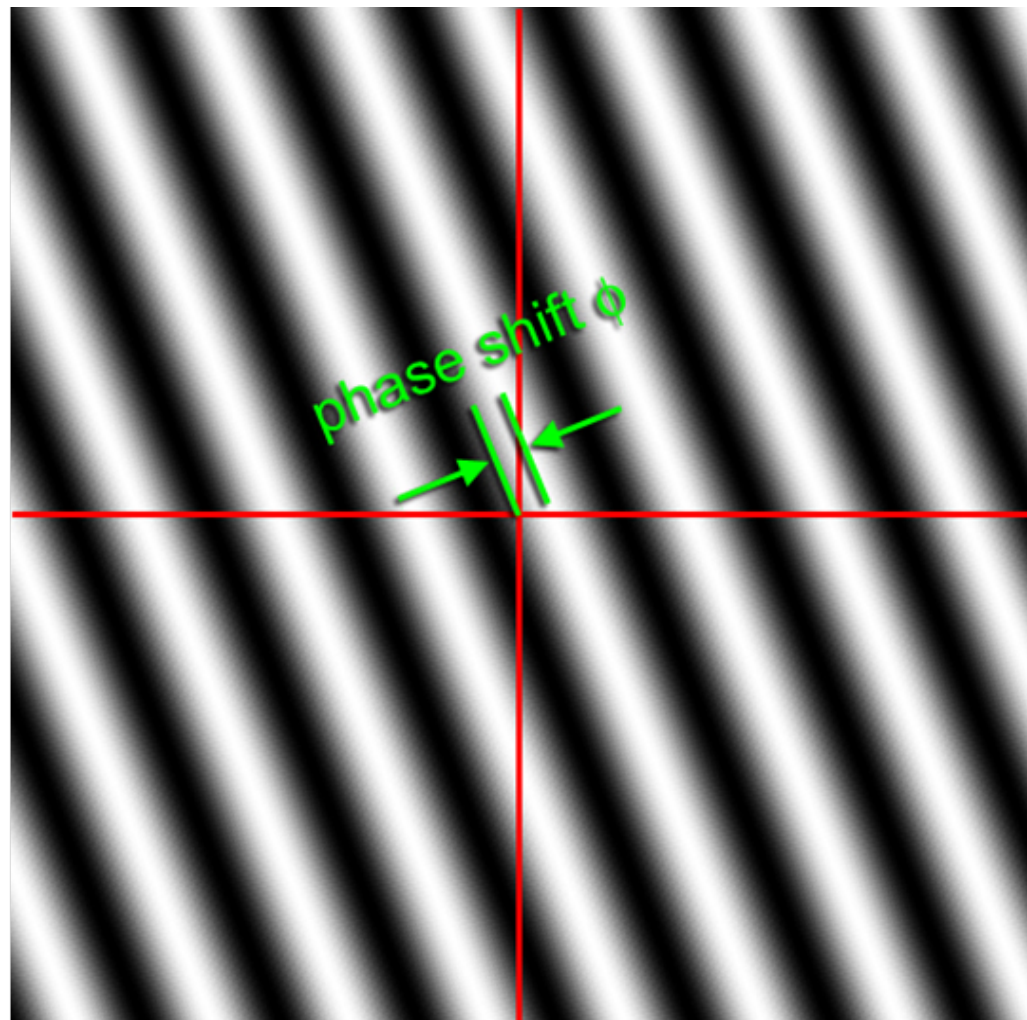
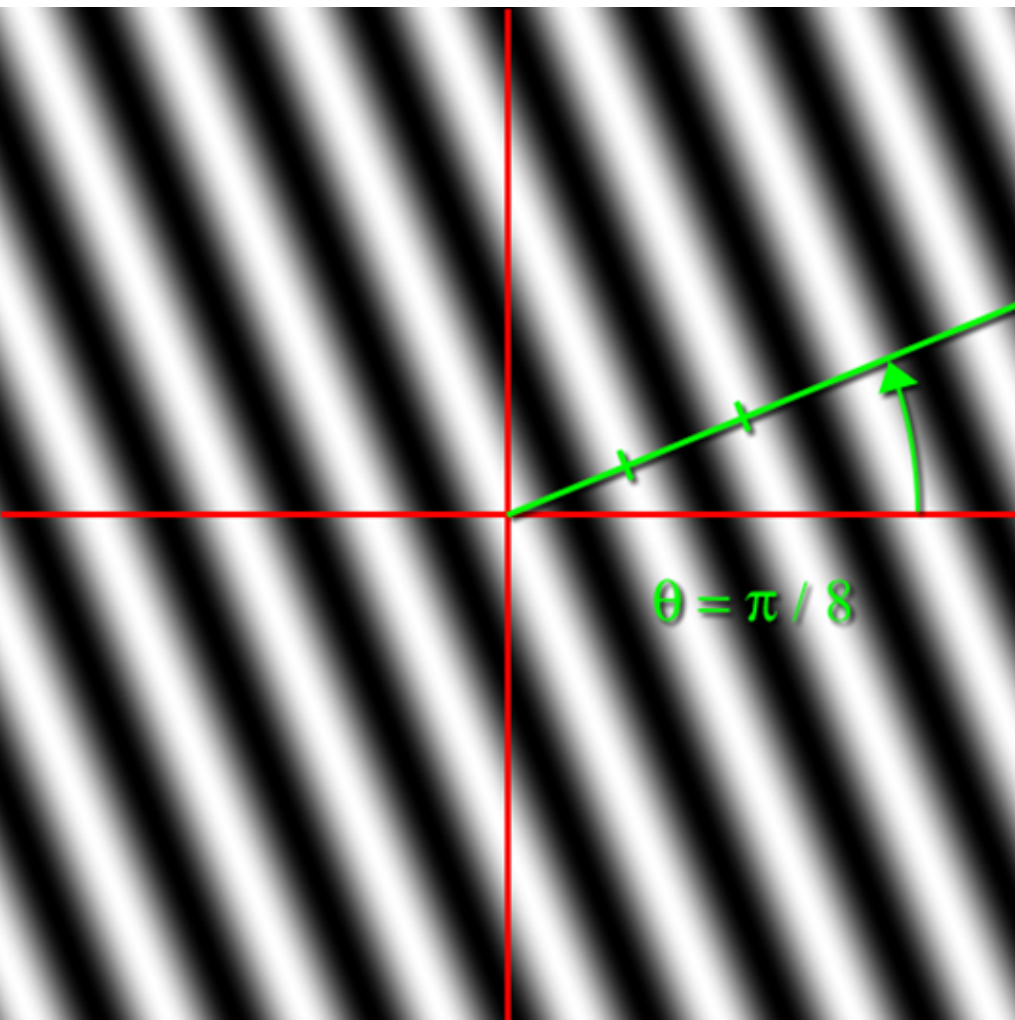
3



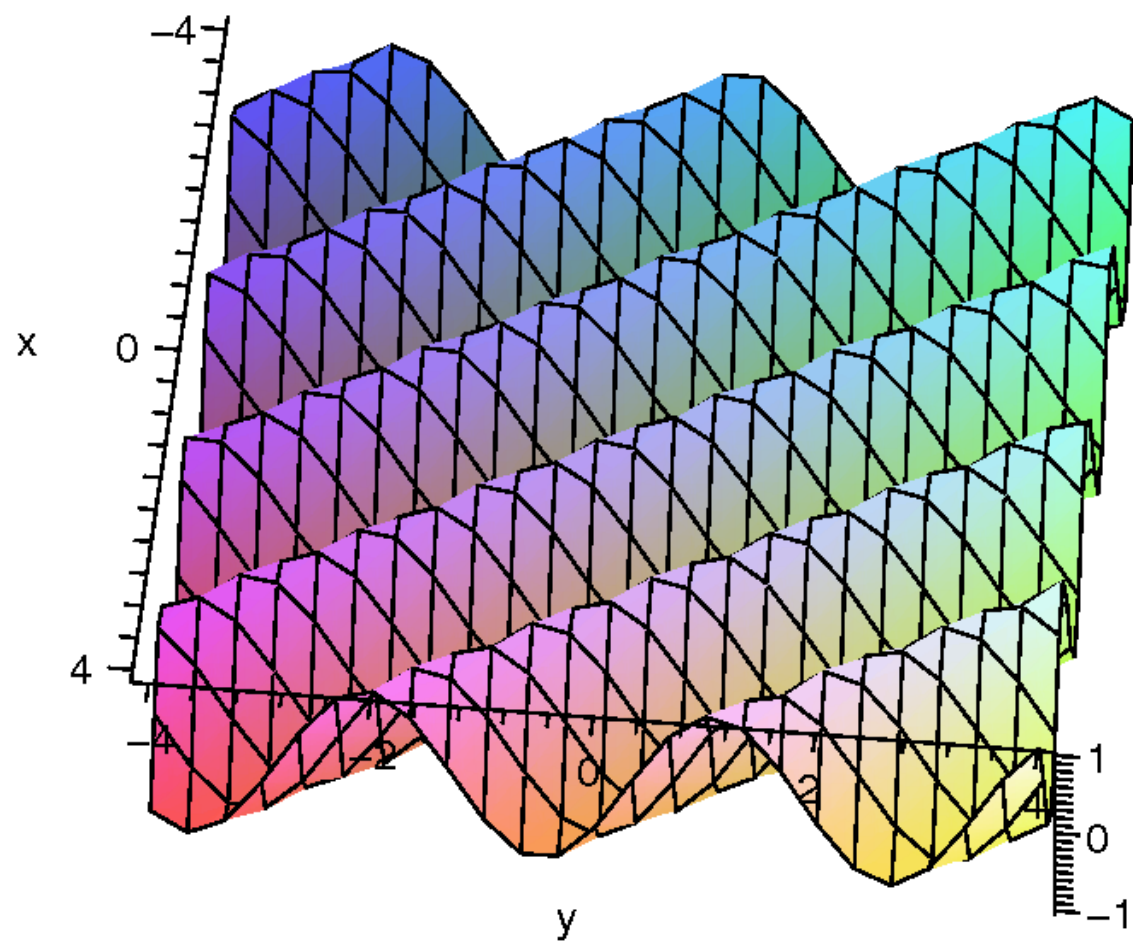


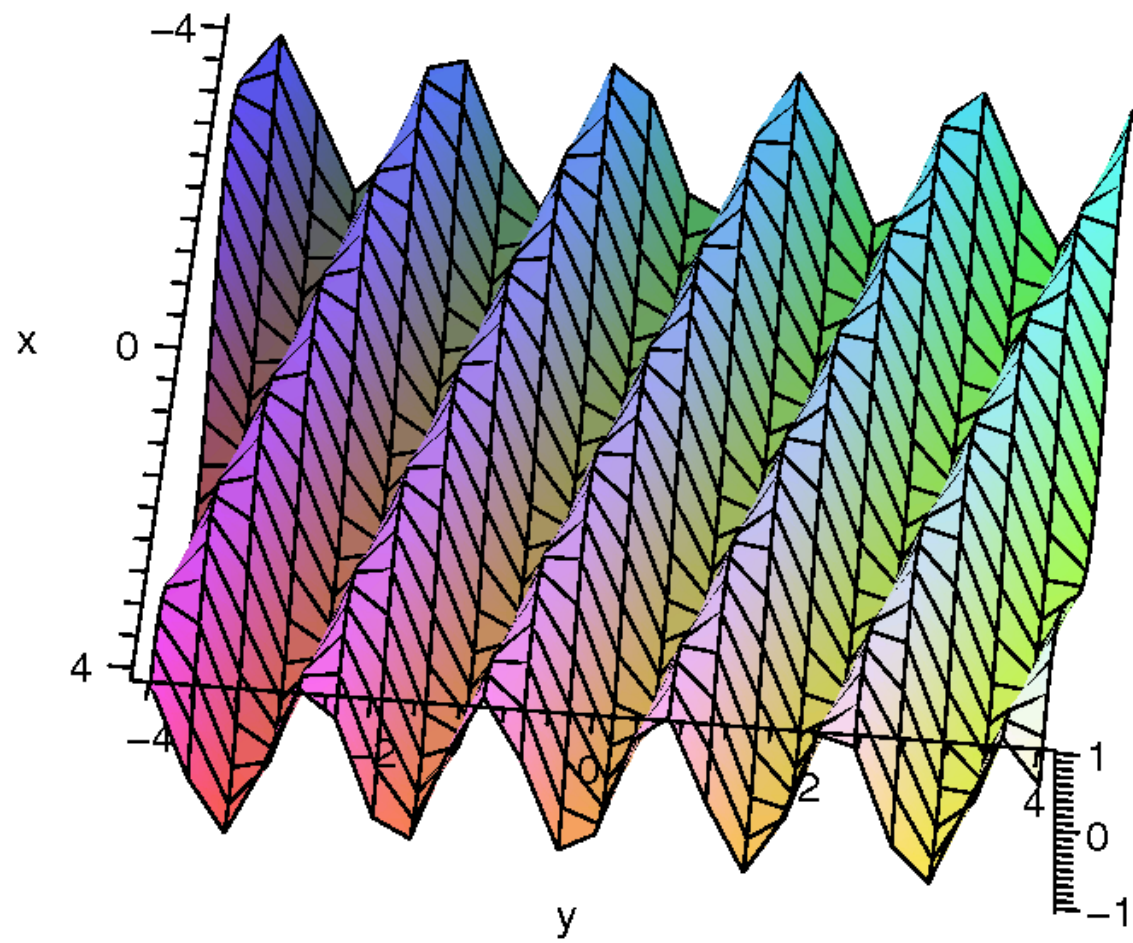


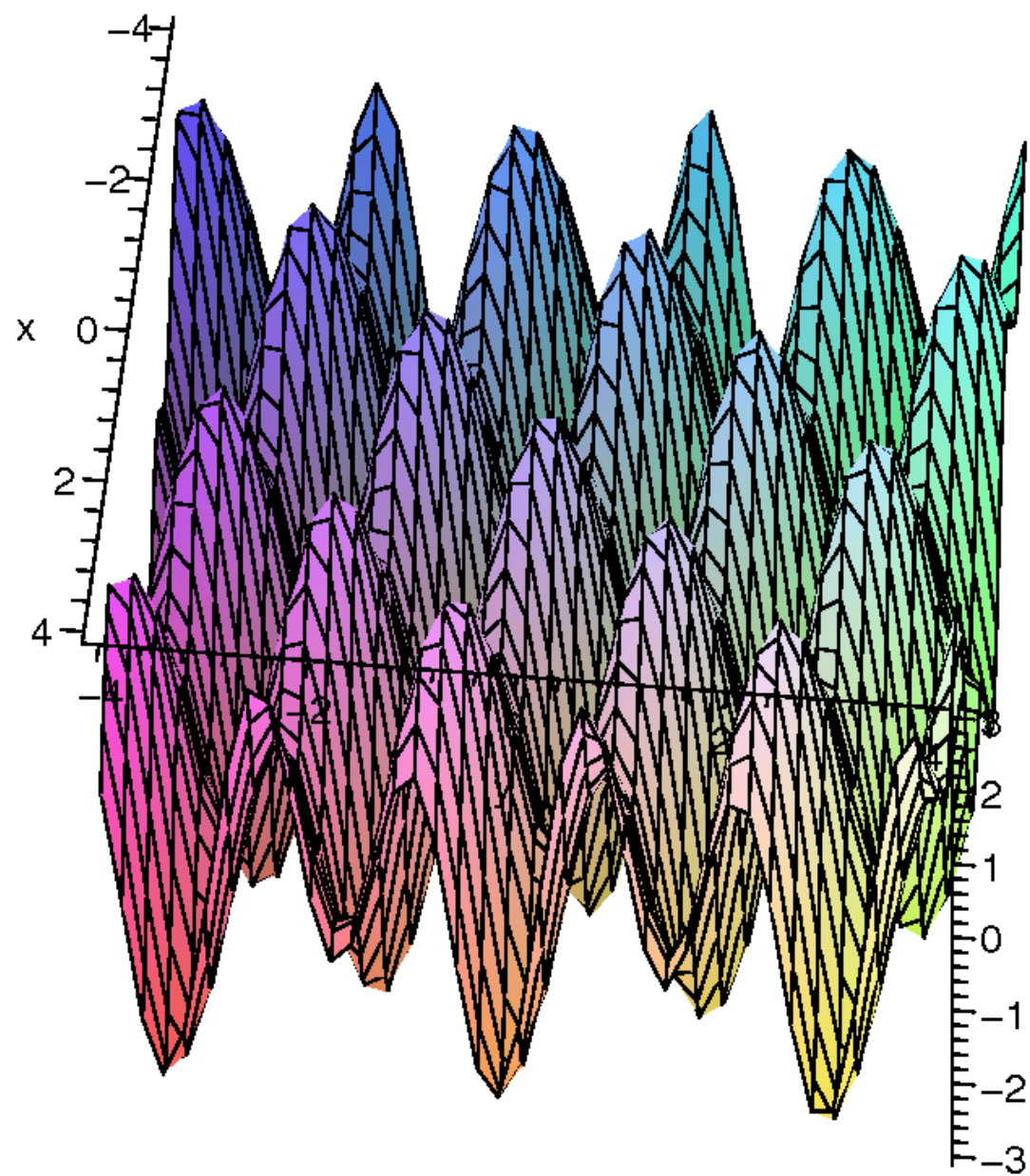


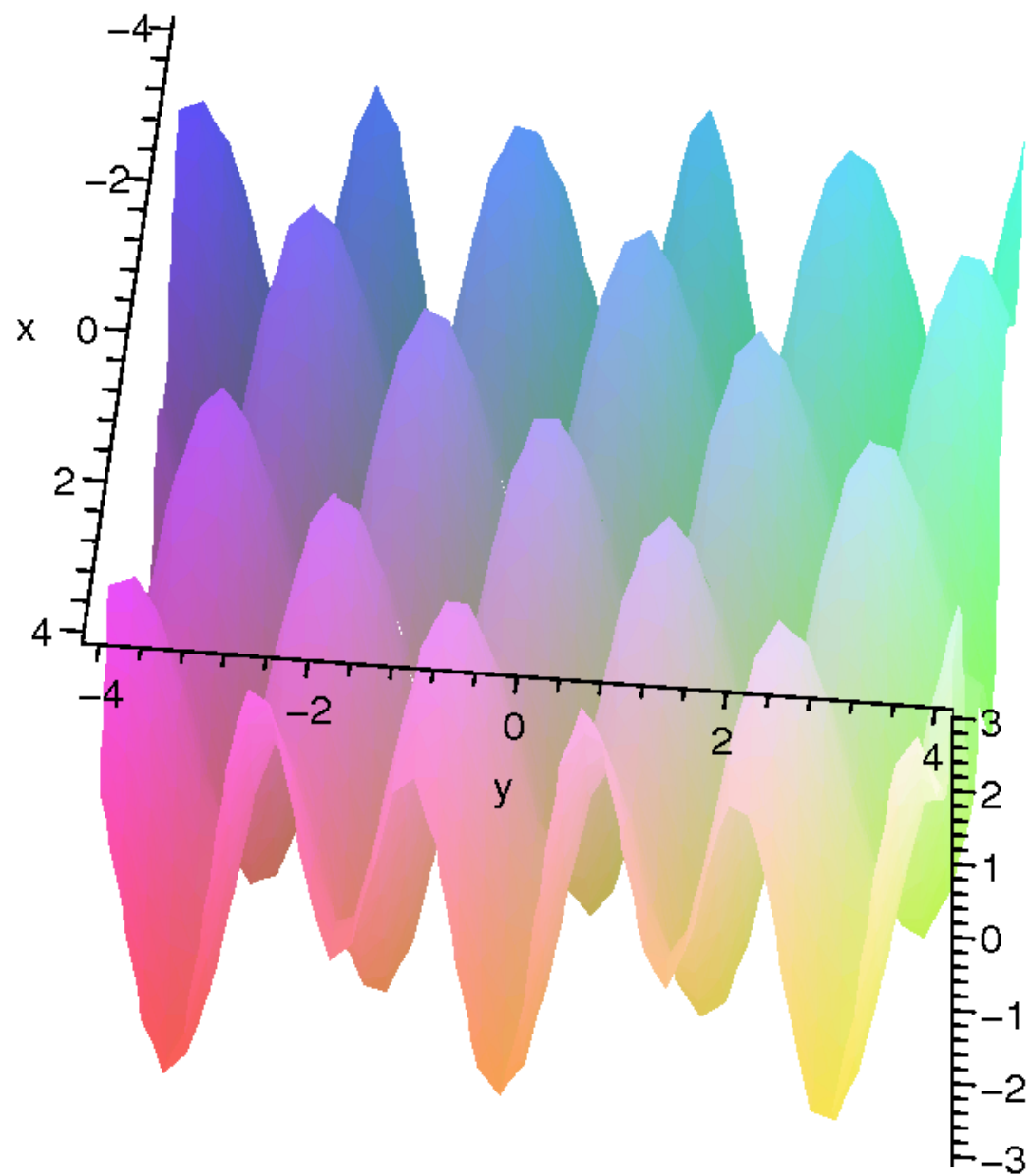


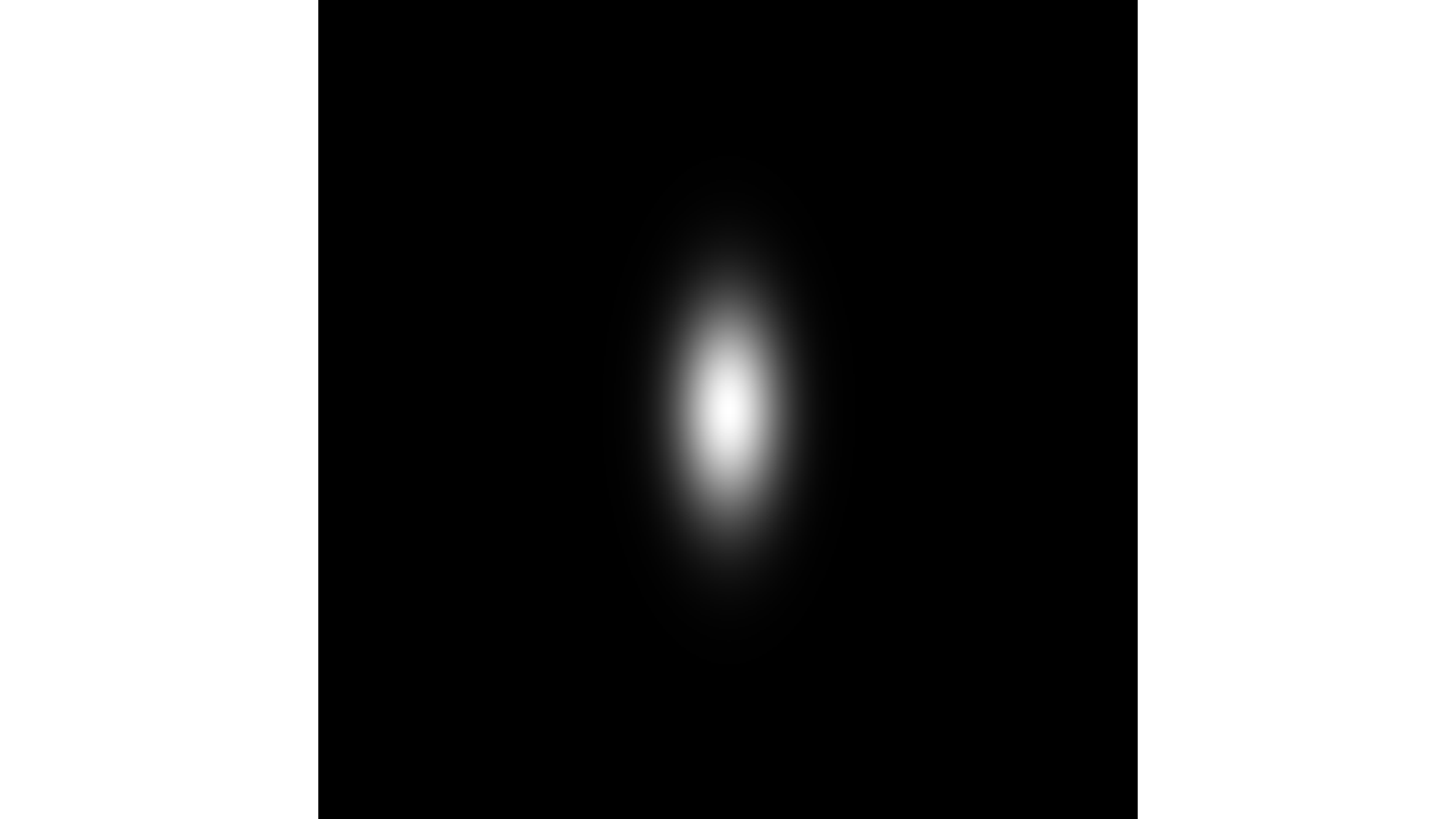


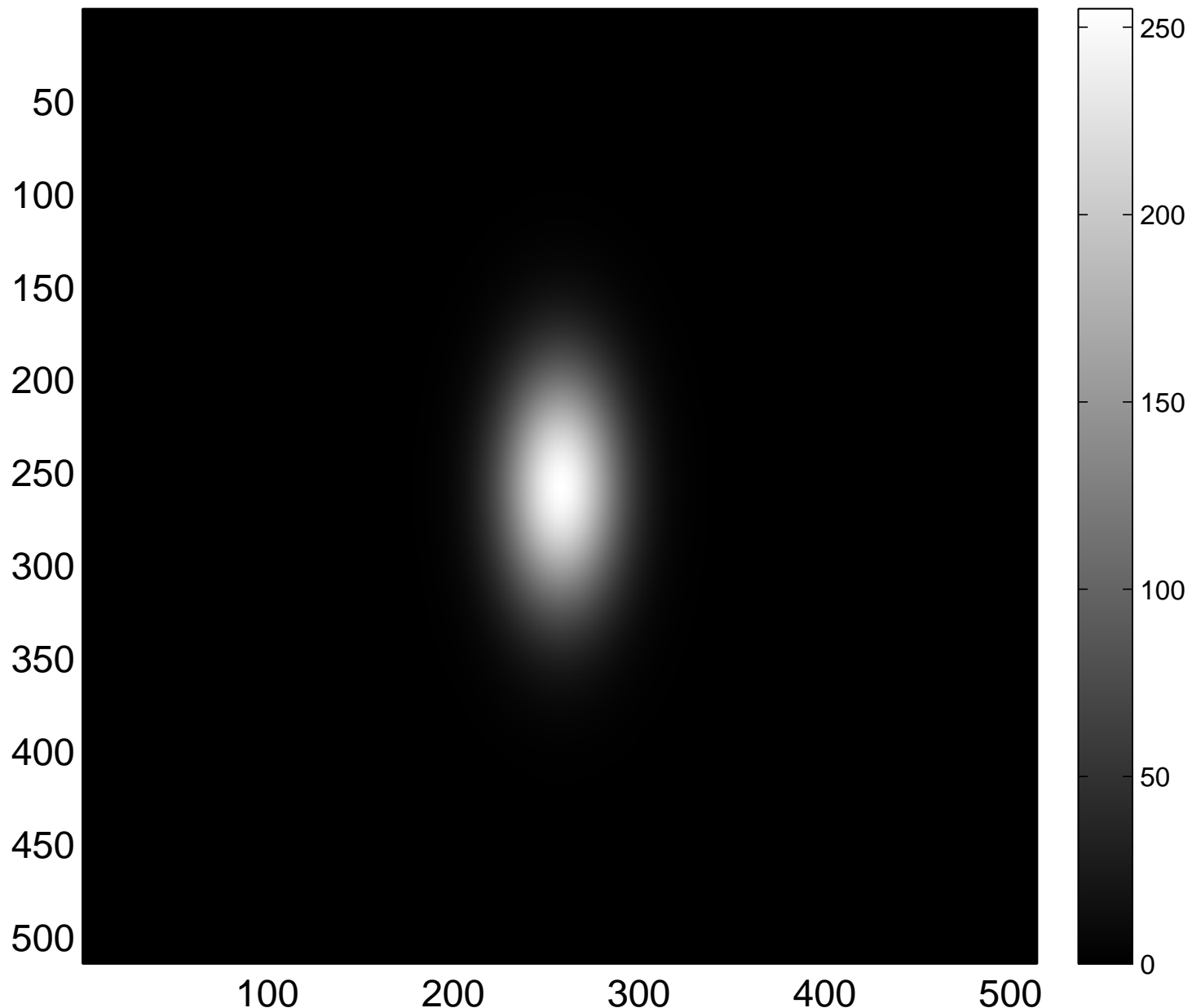




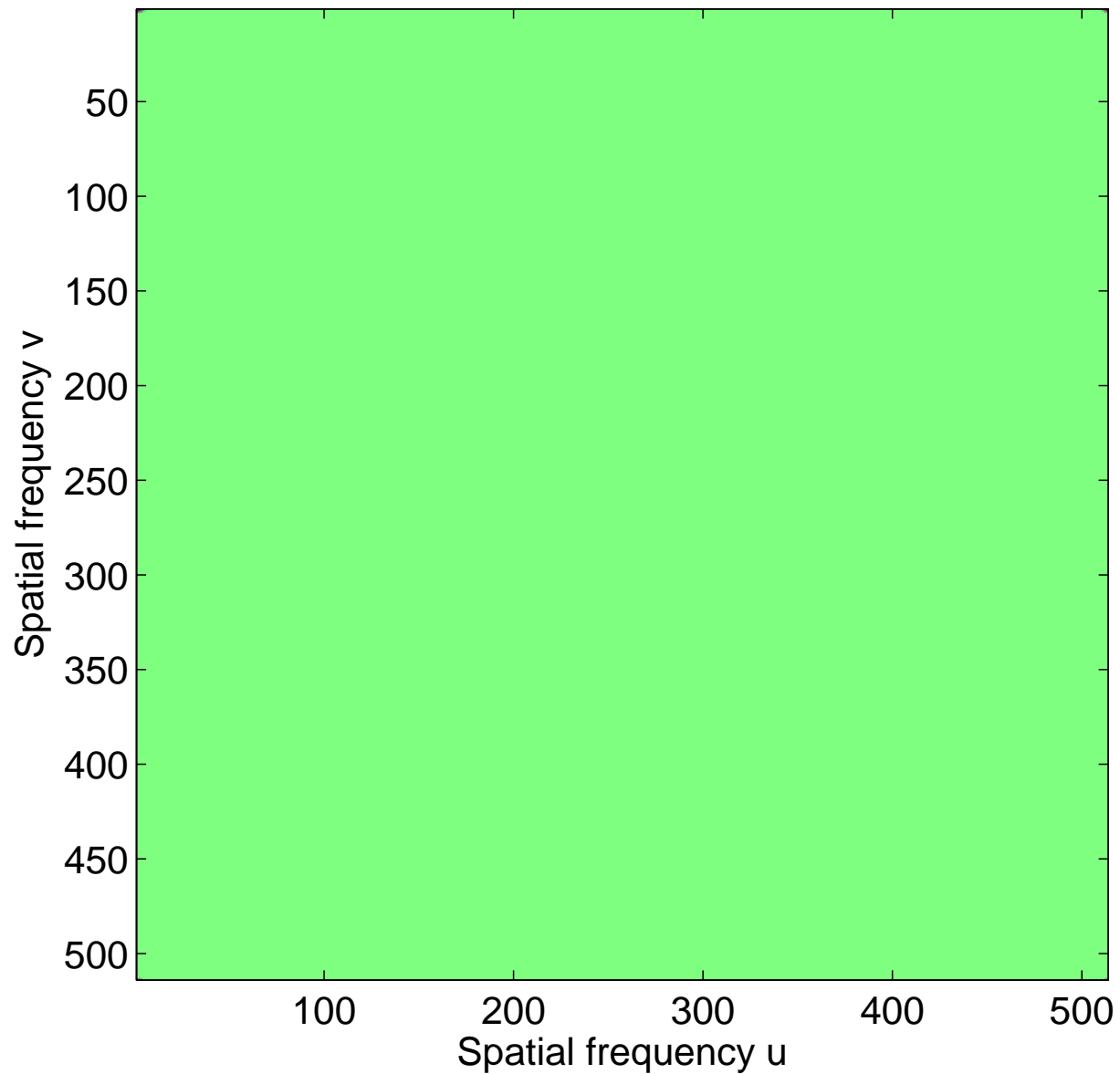




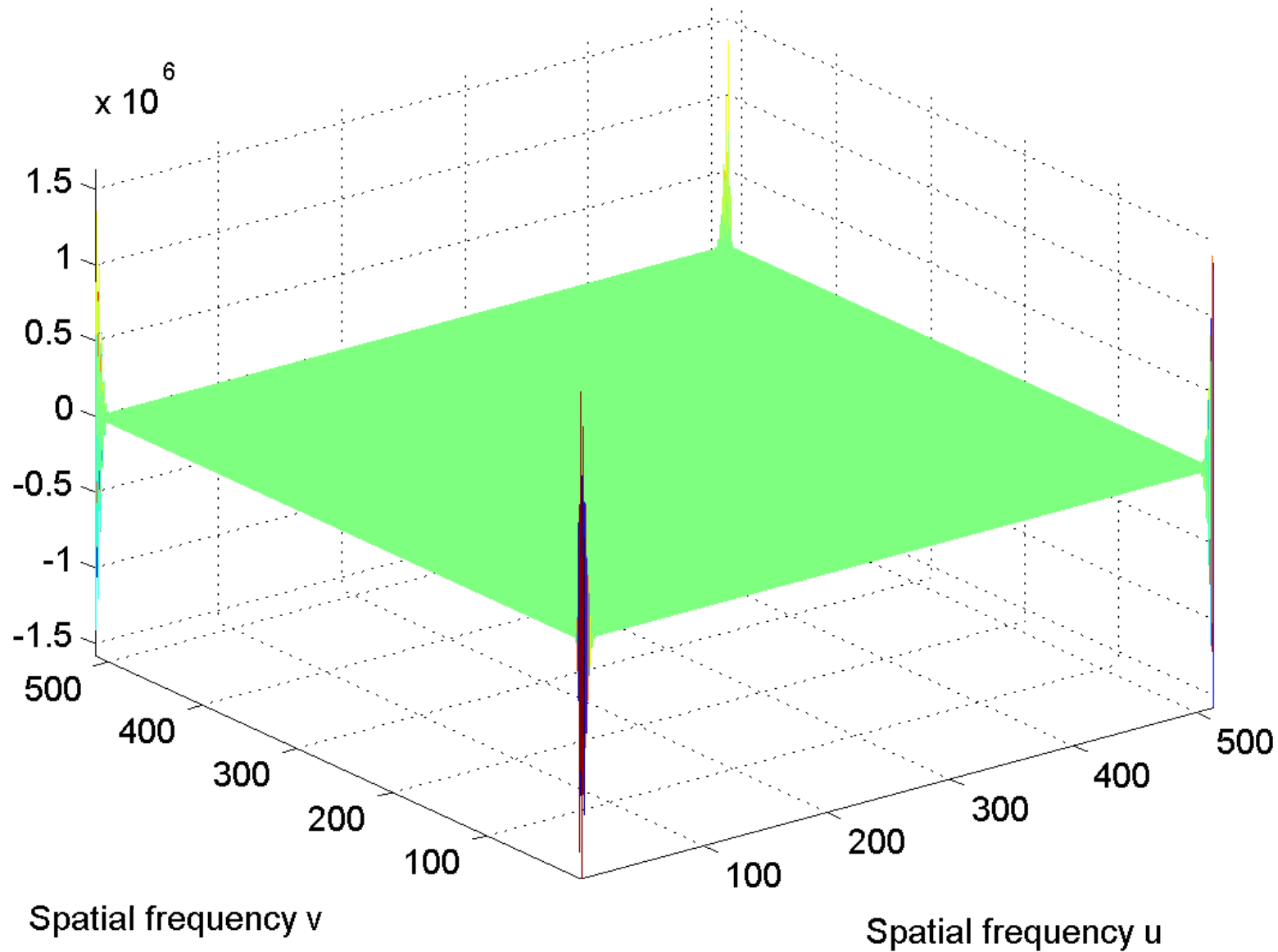




Real part of the spectrum

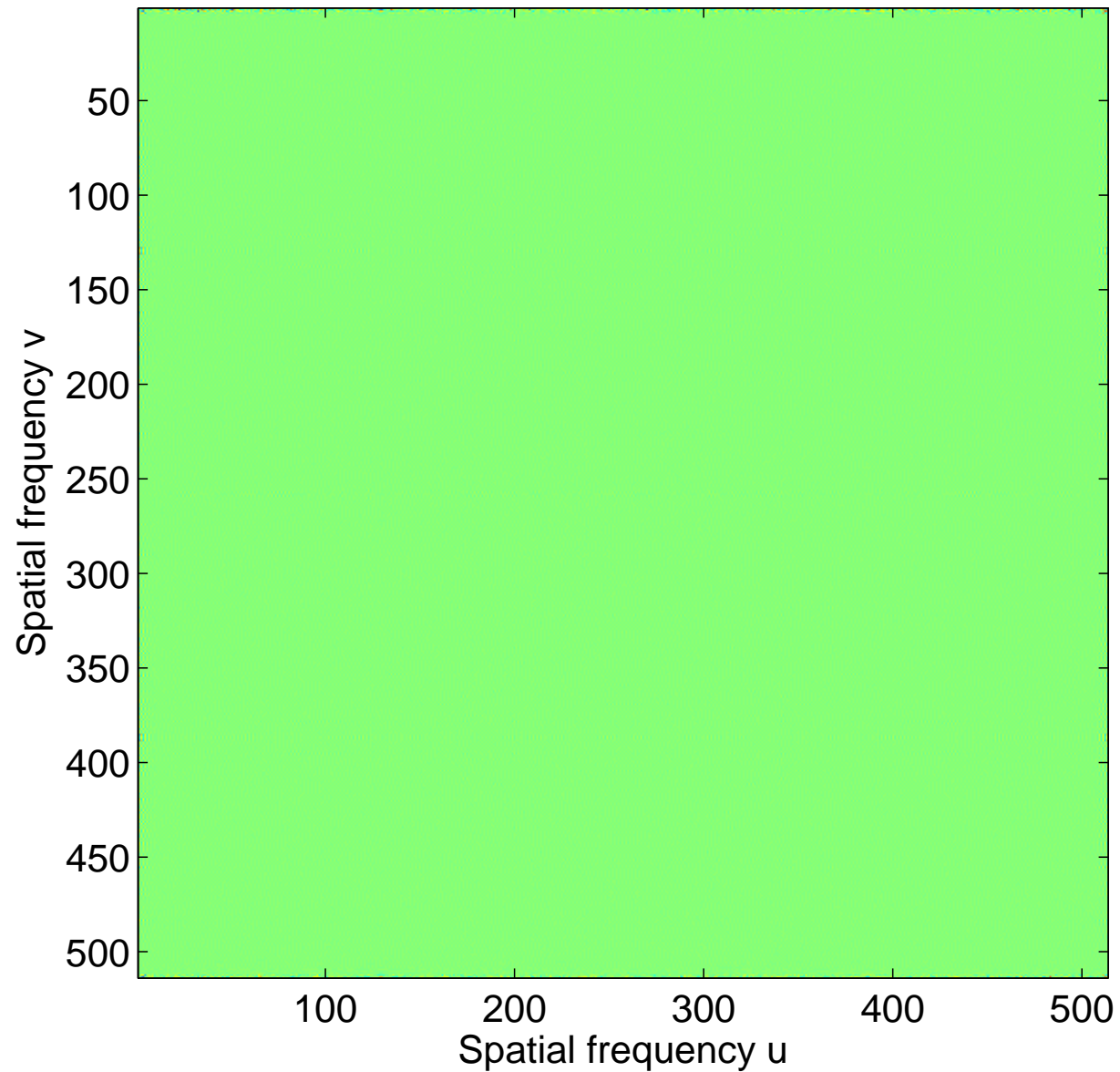


Real part of the spectrum

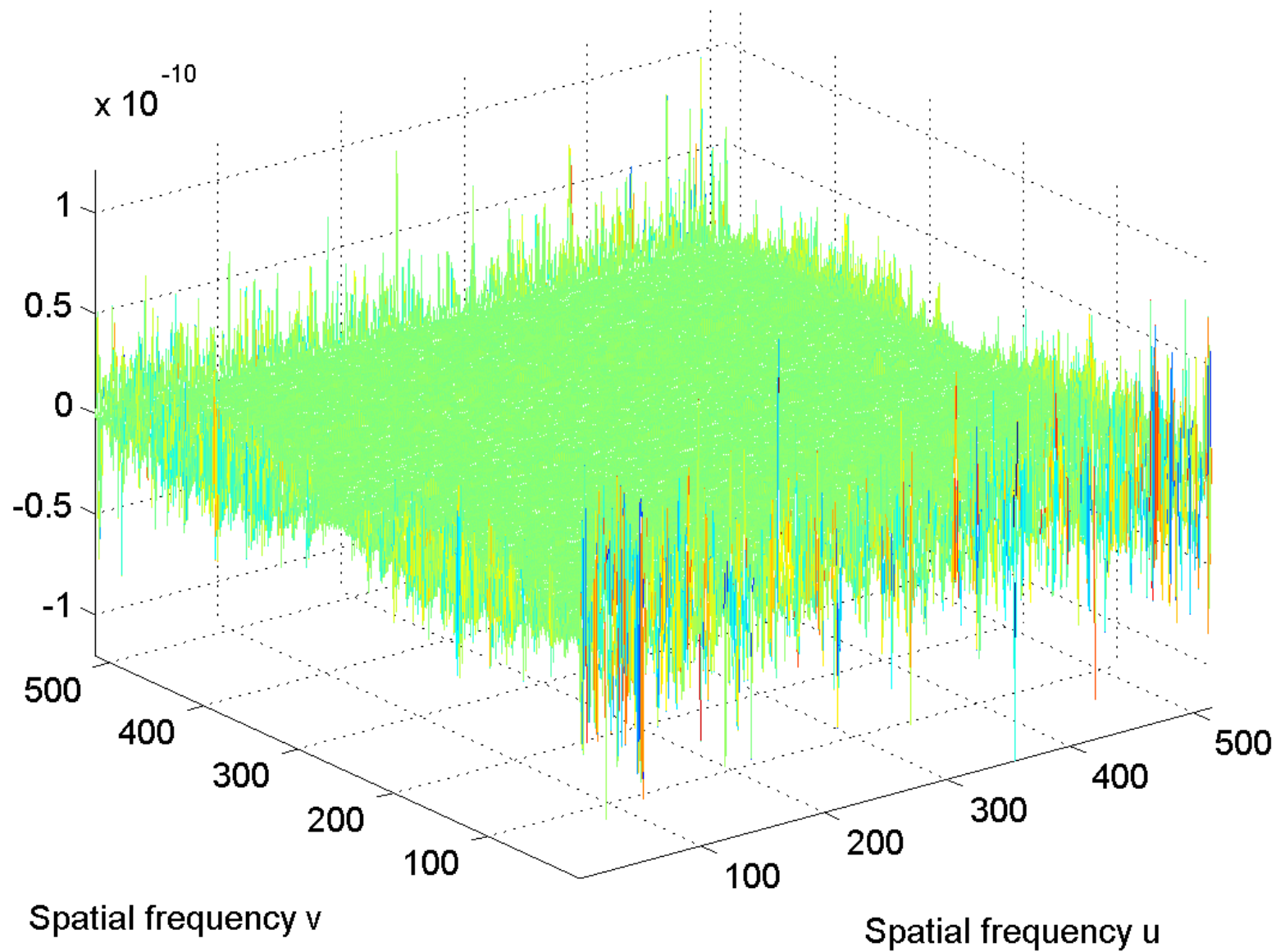




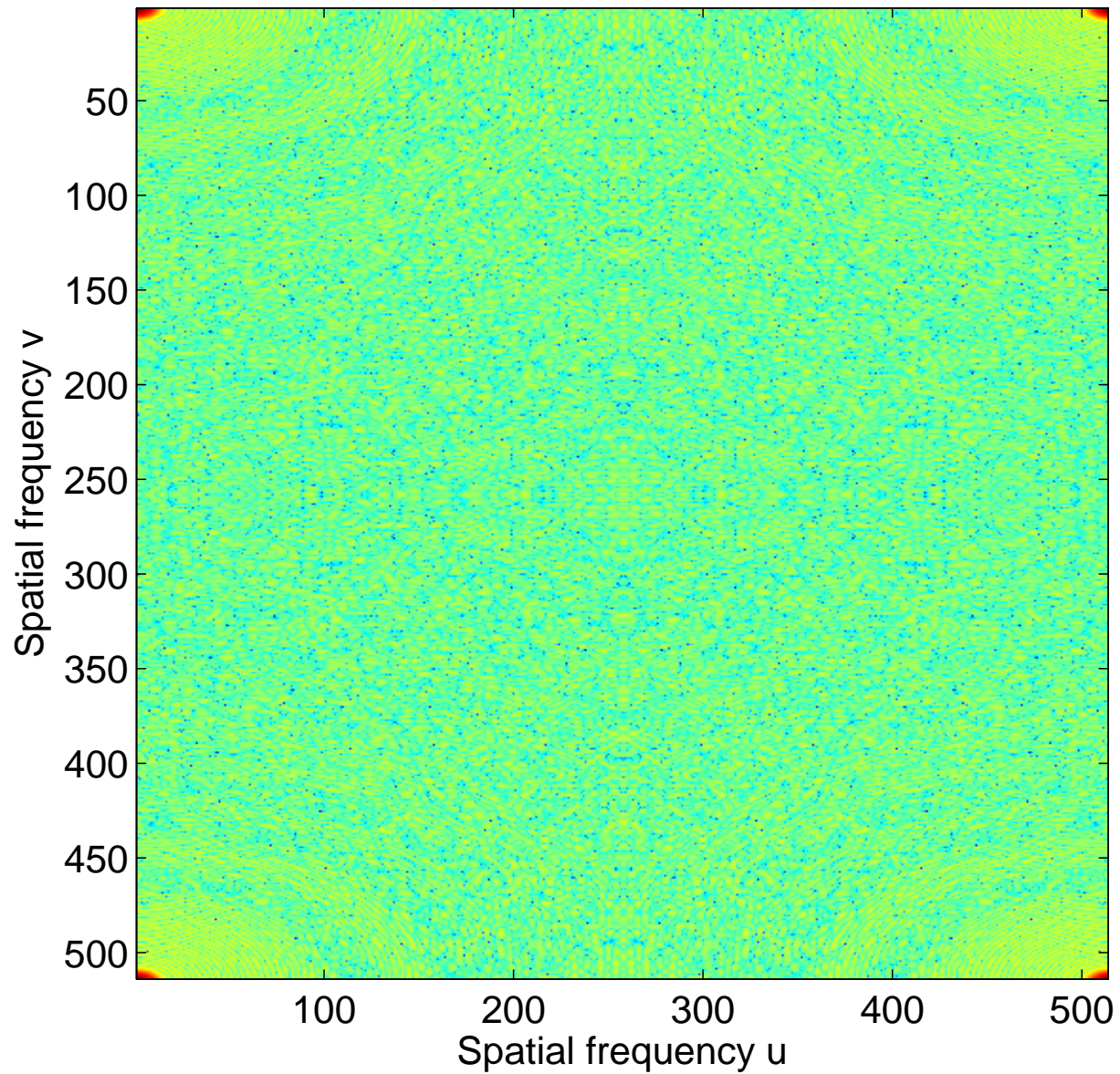
Imaginary part of the spectrum



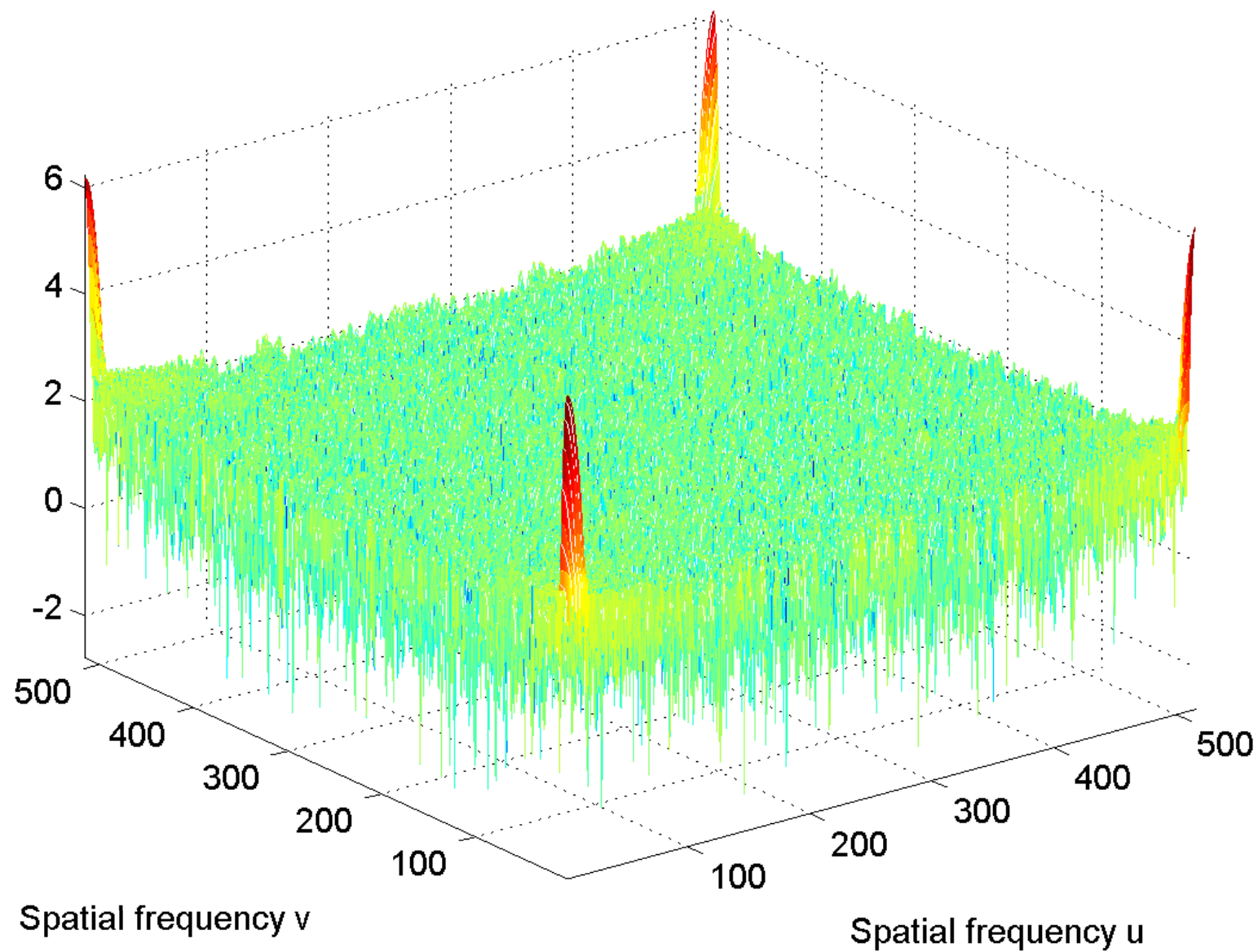
Imaginary part of the spectrum



log power spectrum



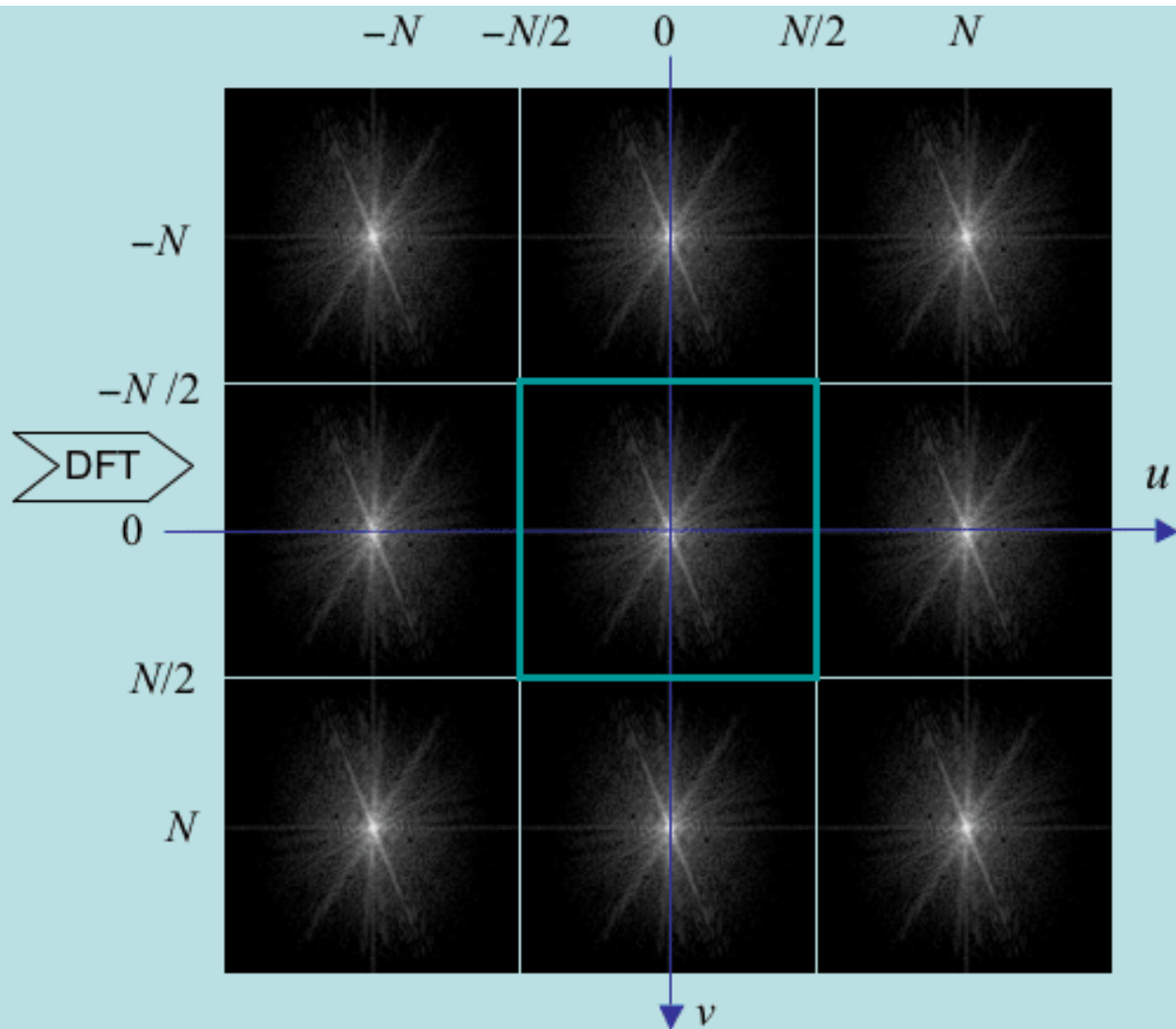
log power spectrum





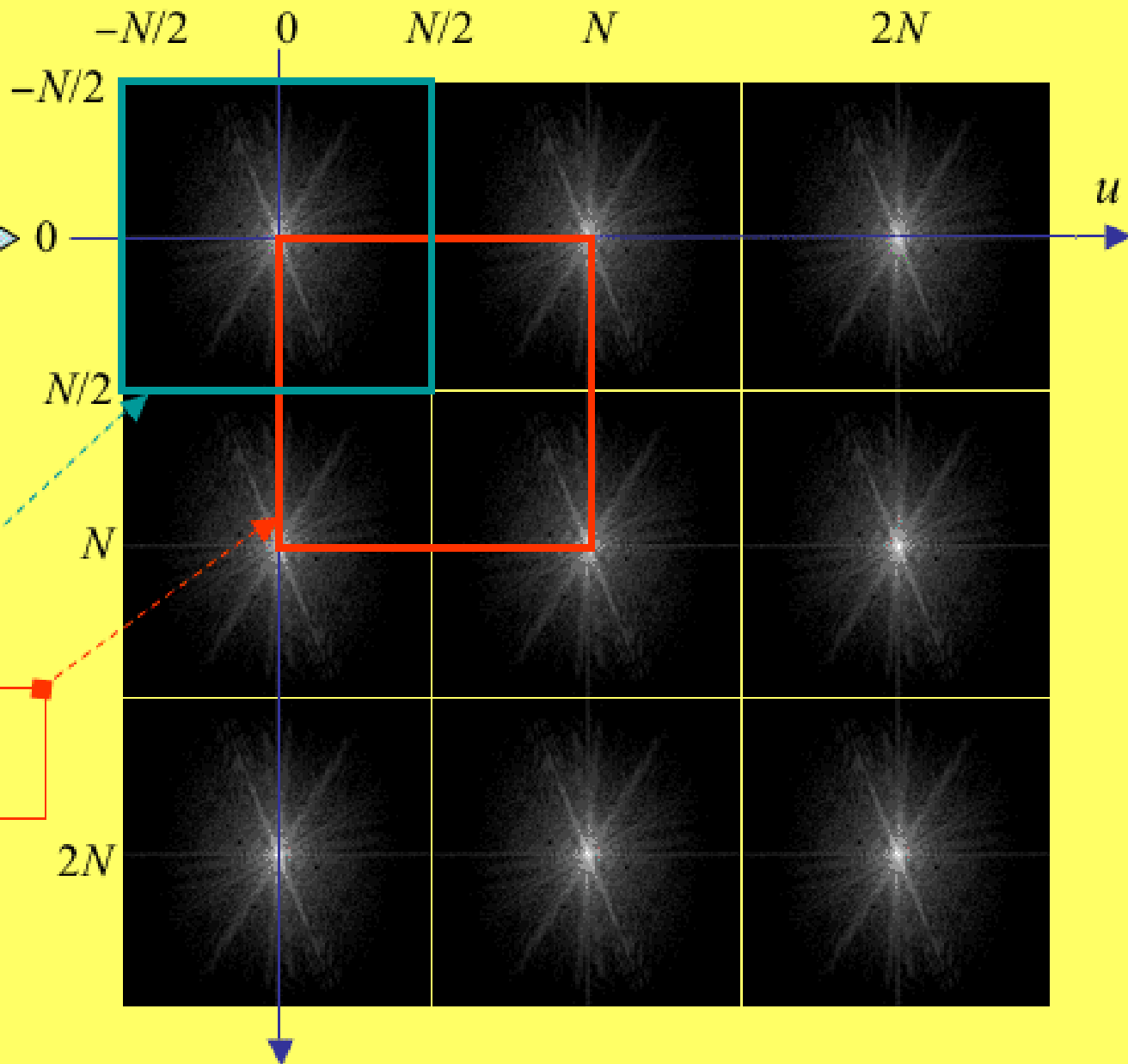


Spatial discontinuities caused by considering an image to be periodic



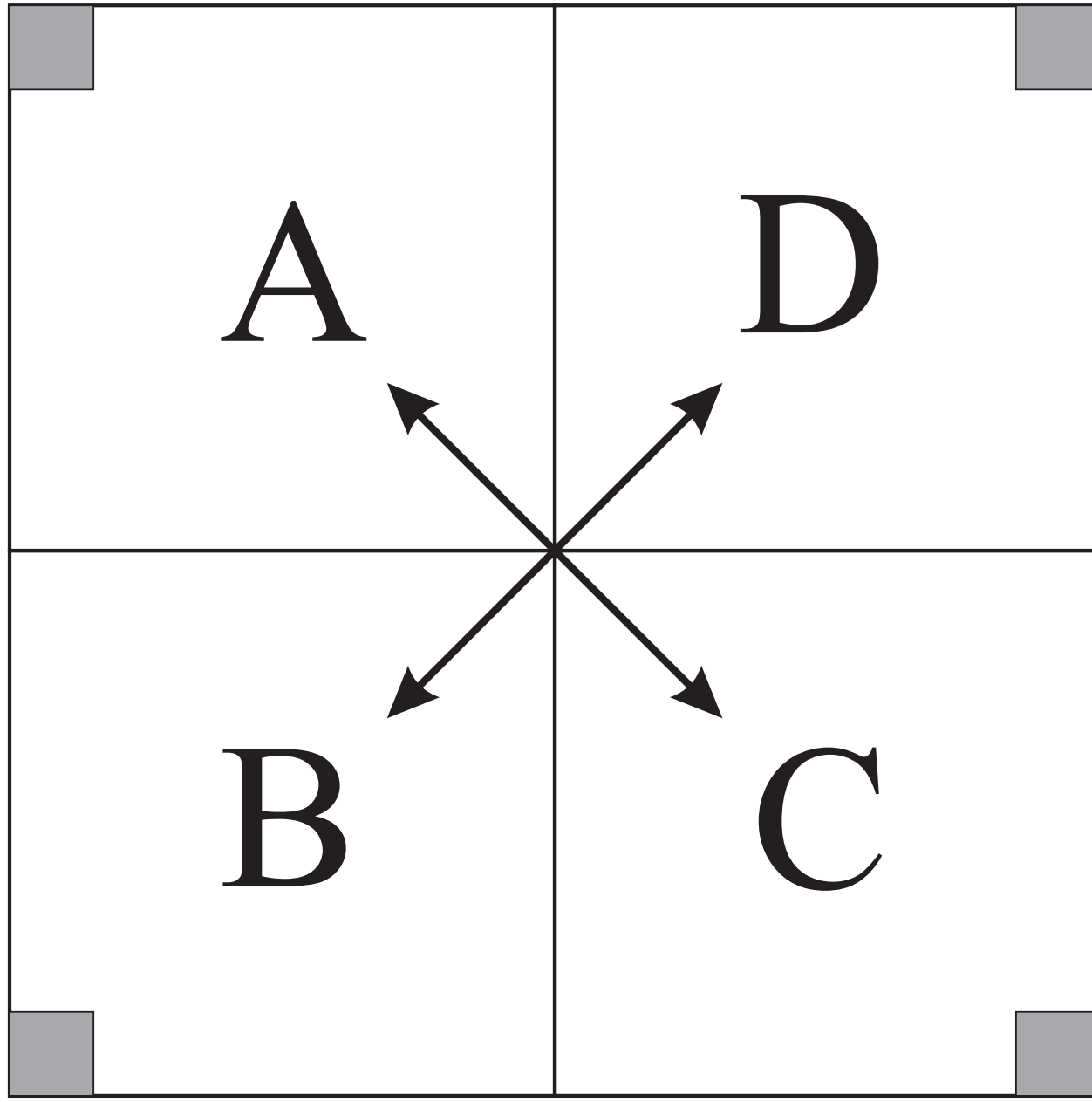


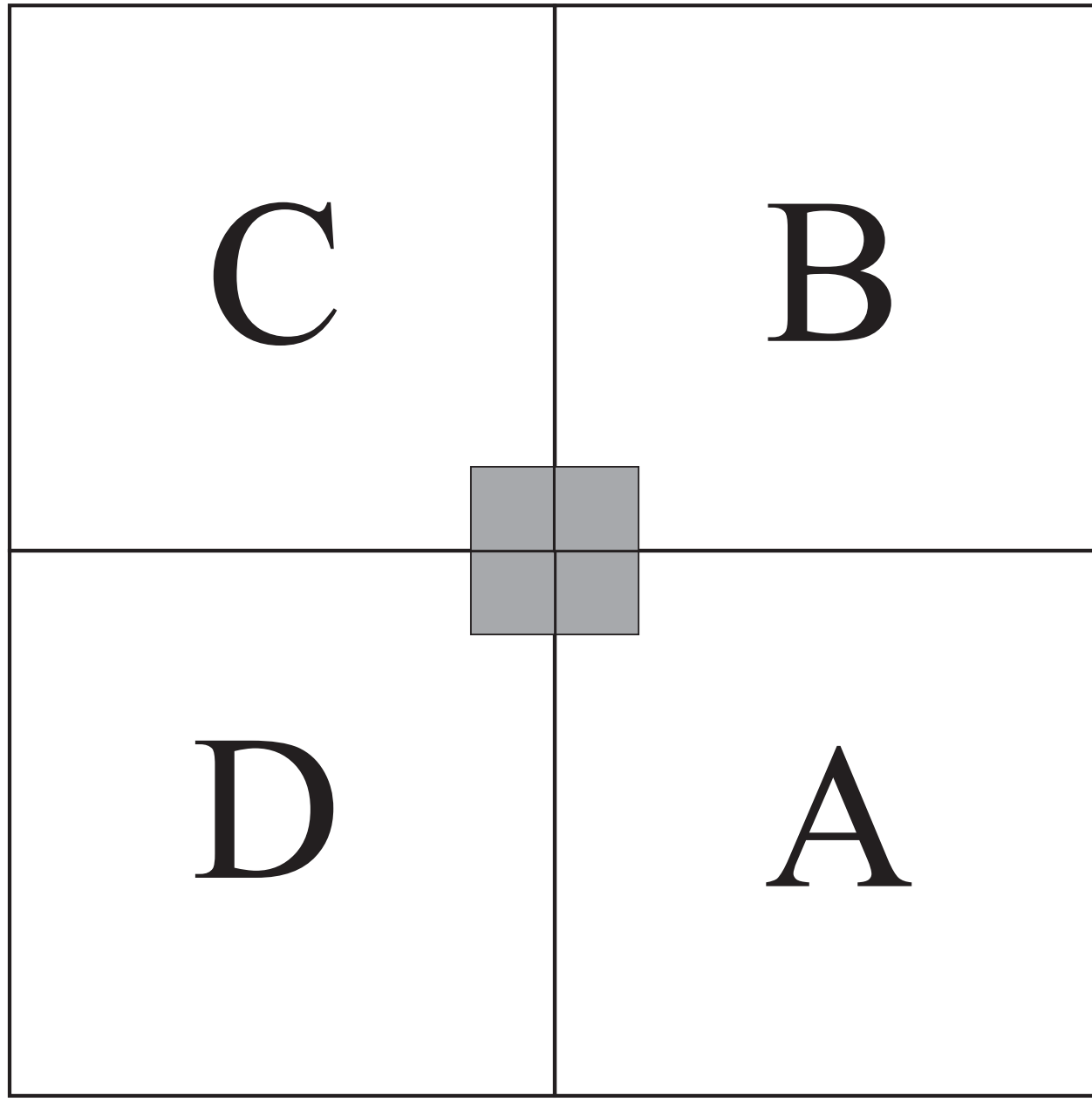
DFT



Representation of spectra  
being easier to interpret

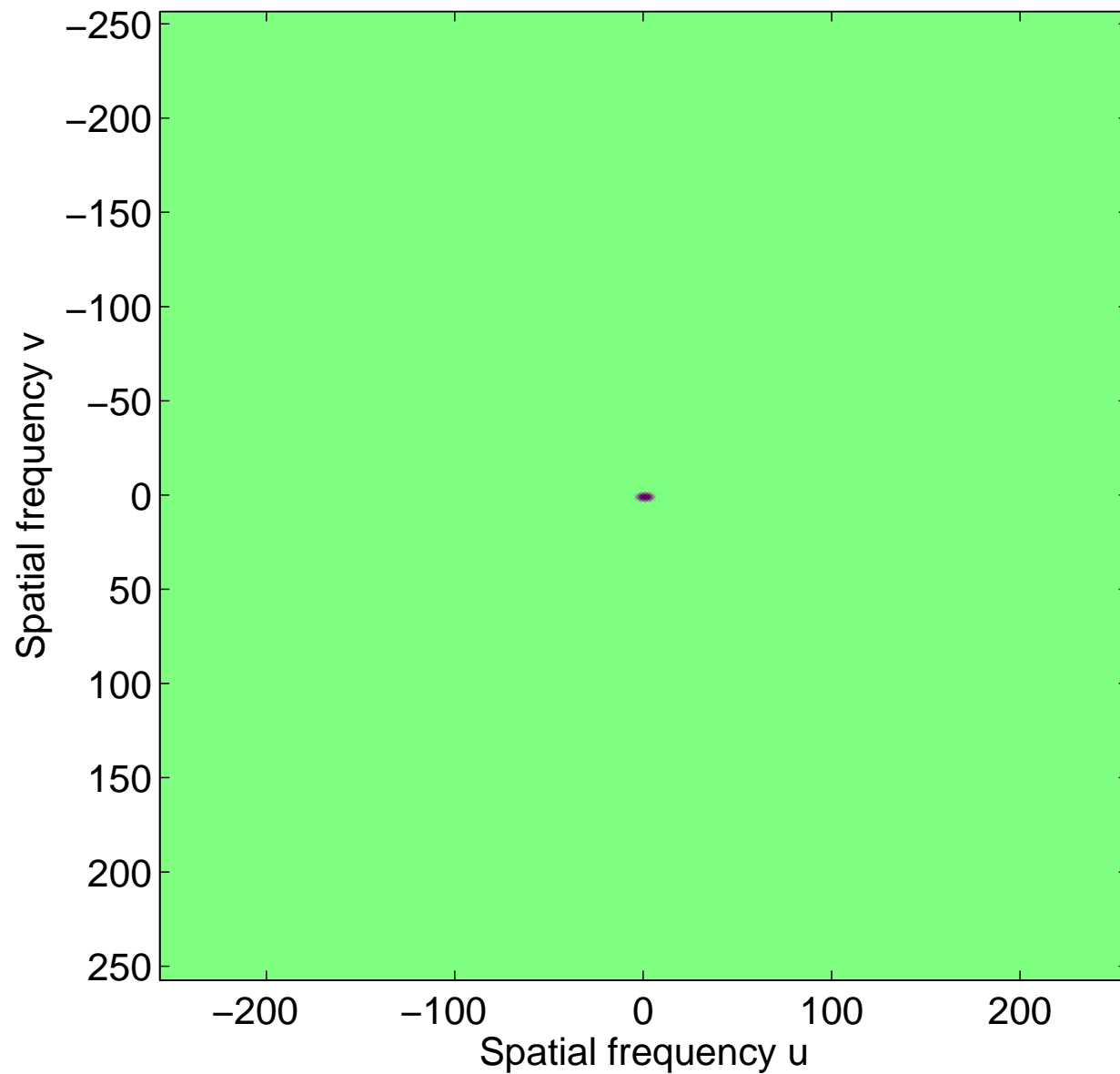
Single period of the spectrum  
computed by a DFT



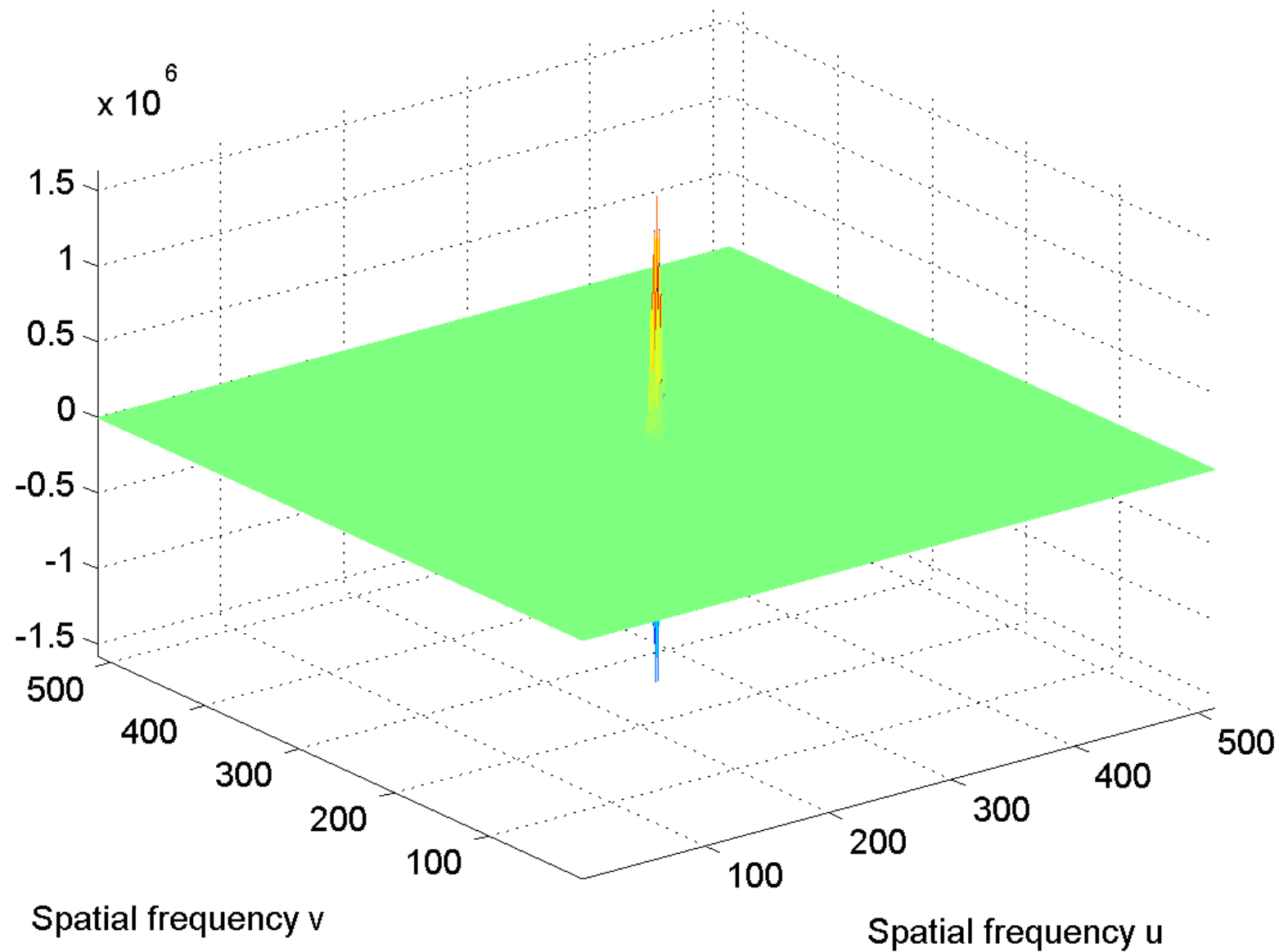




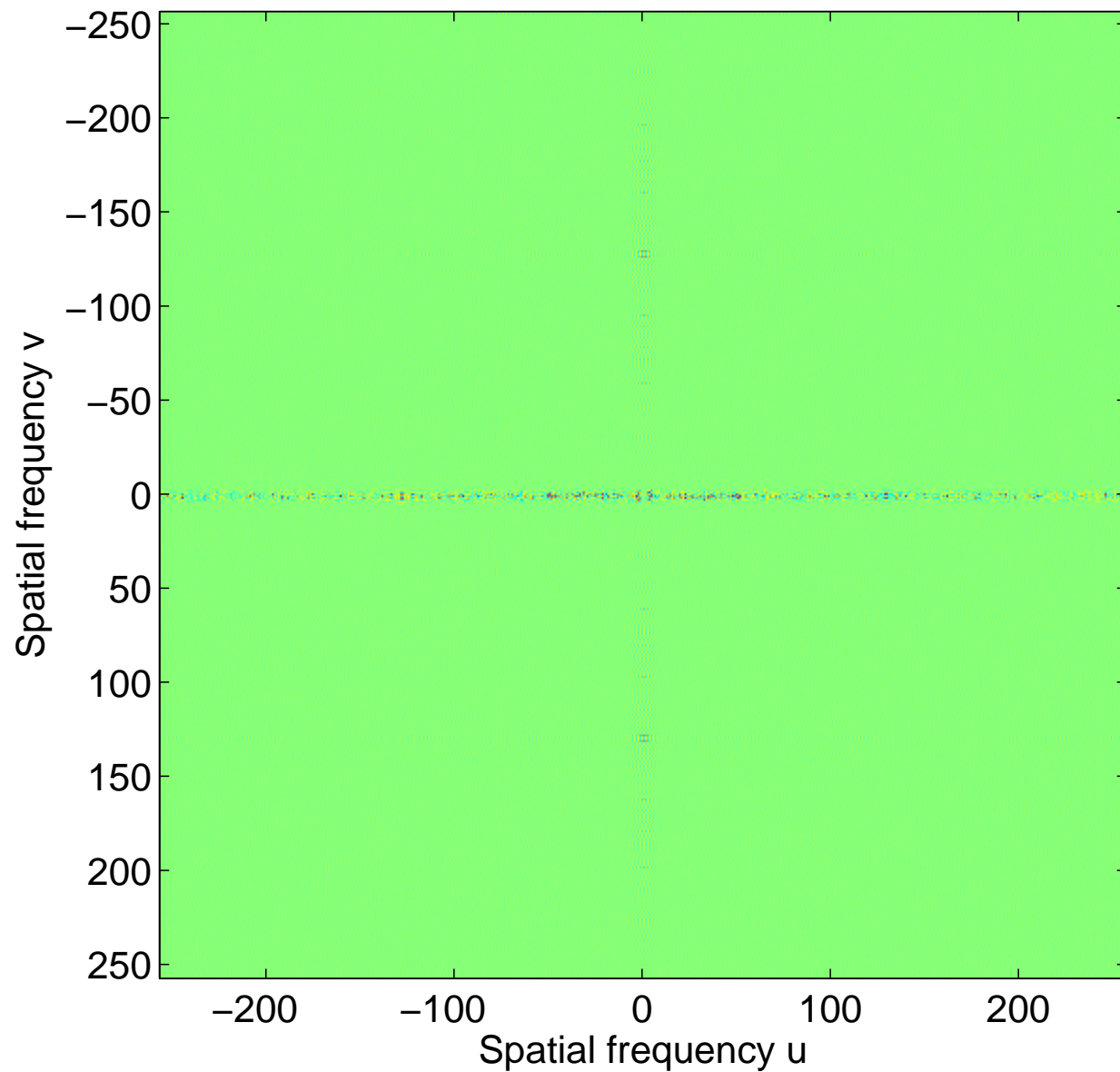
Real part of the spectrum, centered



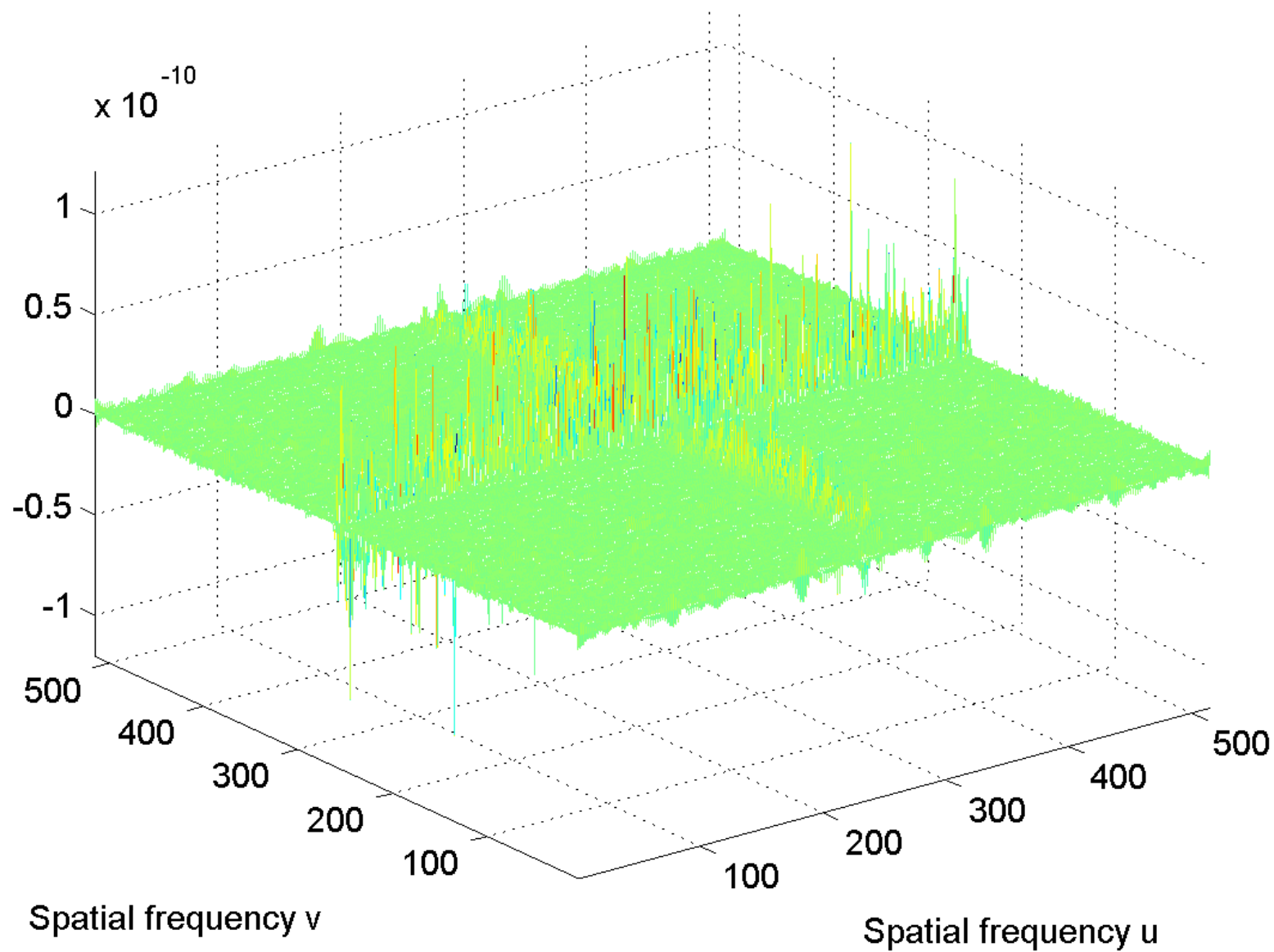
Real part of the spectrum, centered



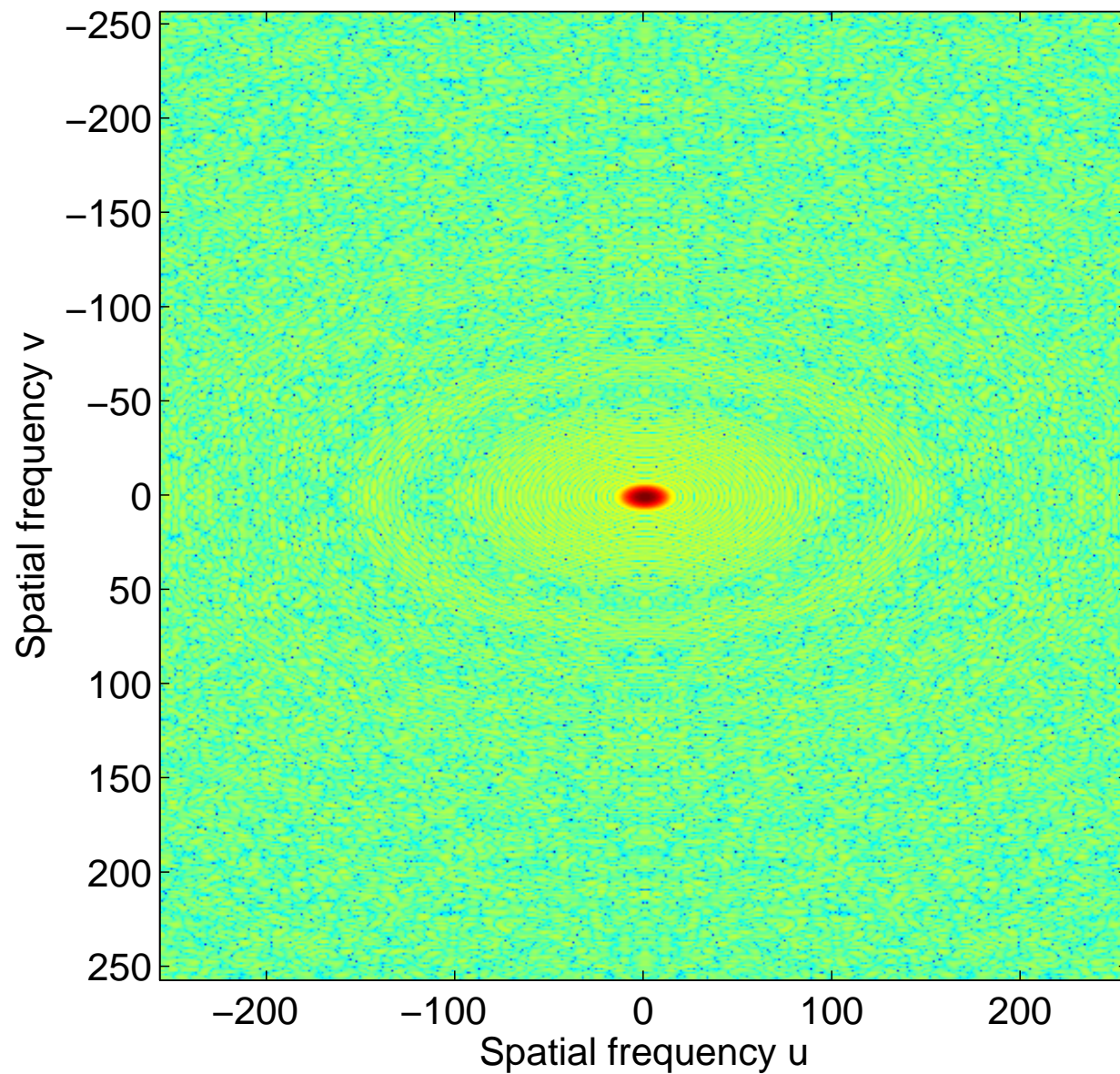
Imaginary part of the spectrum, centered



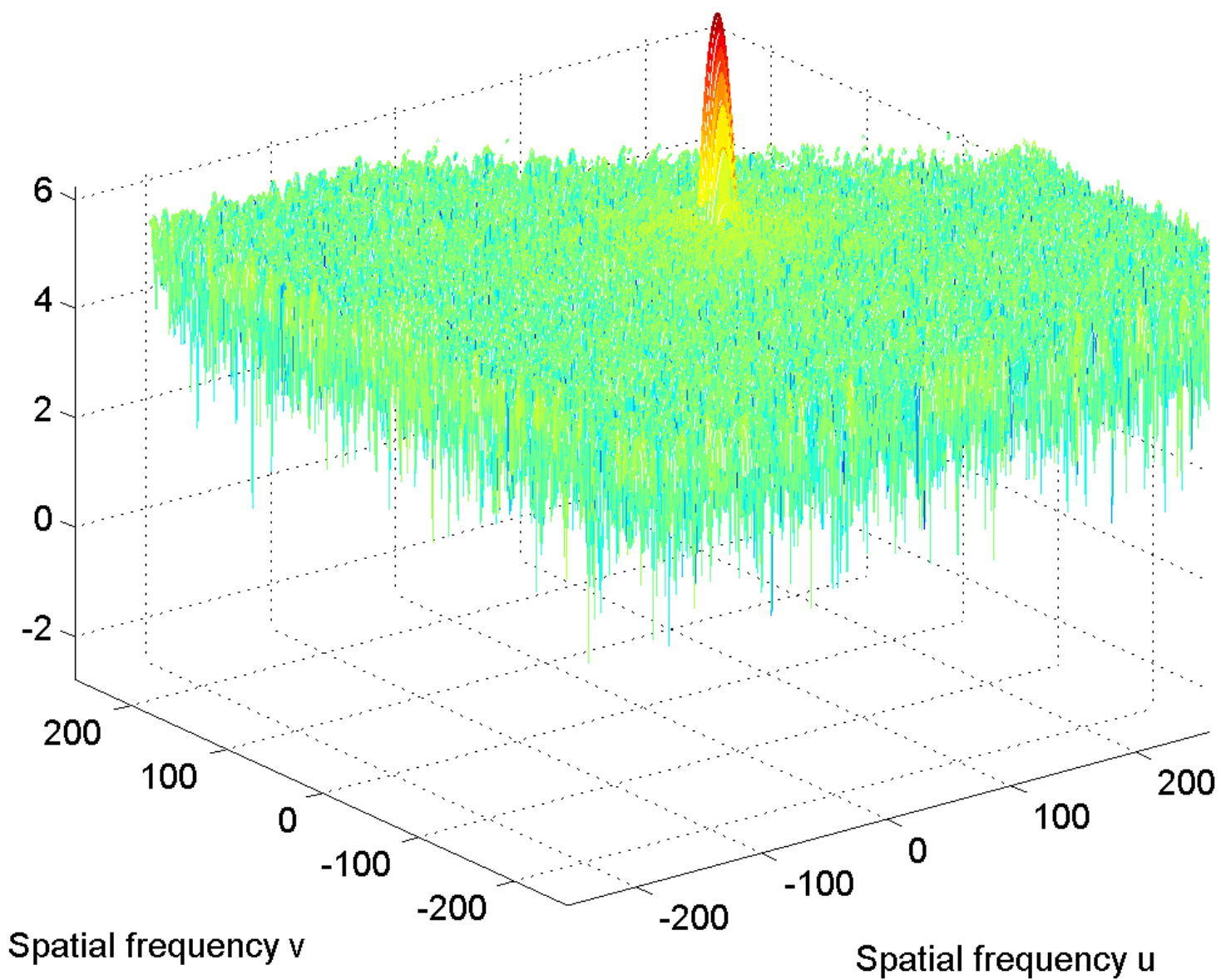
Imaginary part of the spectrum, centered



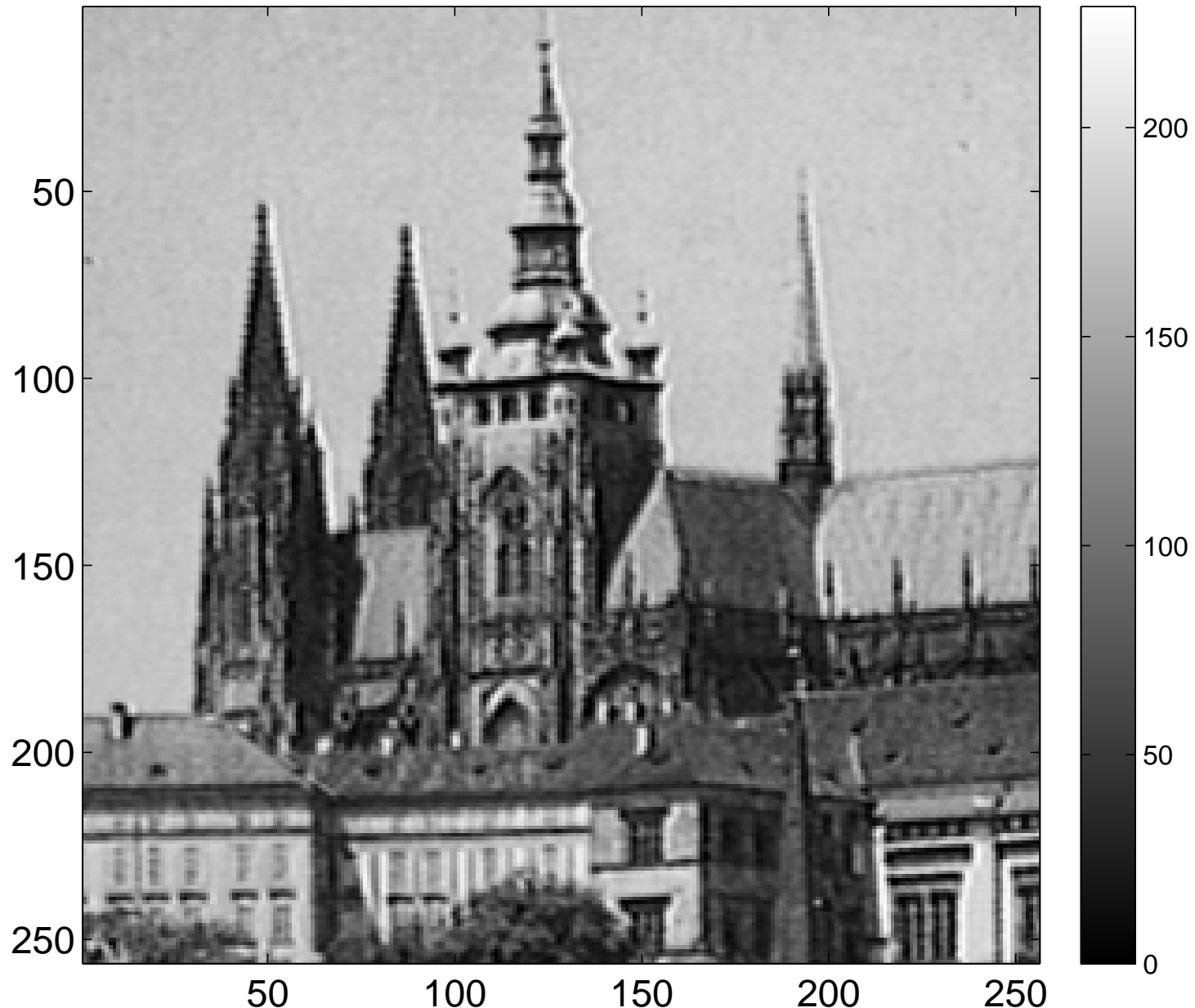
log power spectrum, centered



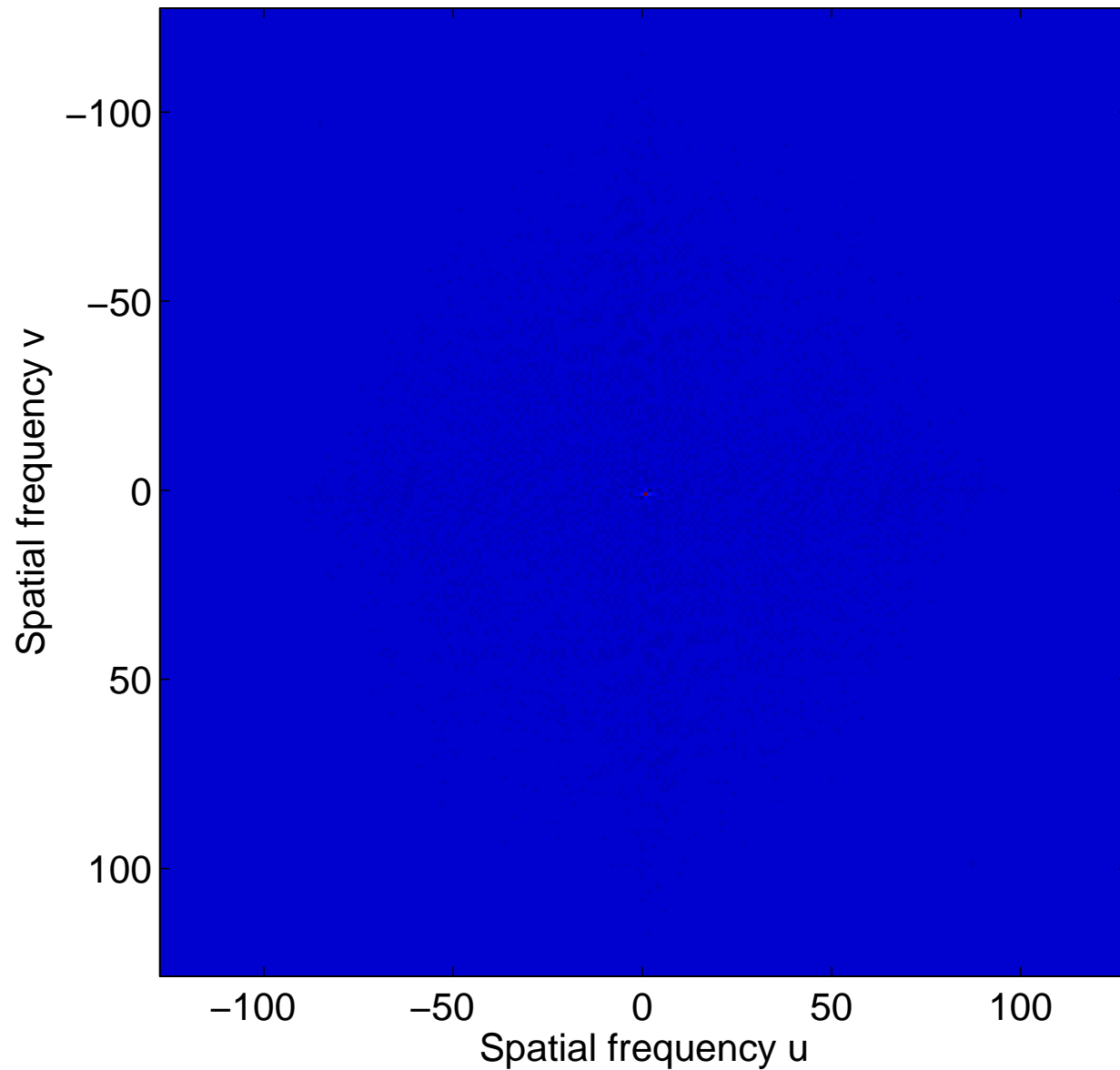
log power spectrum, centered





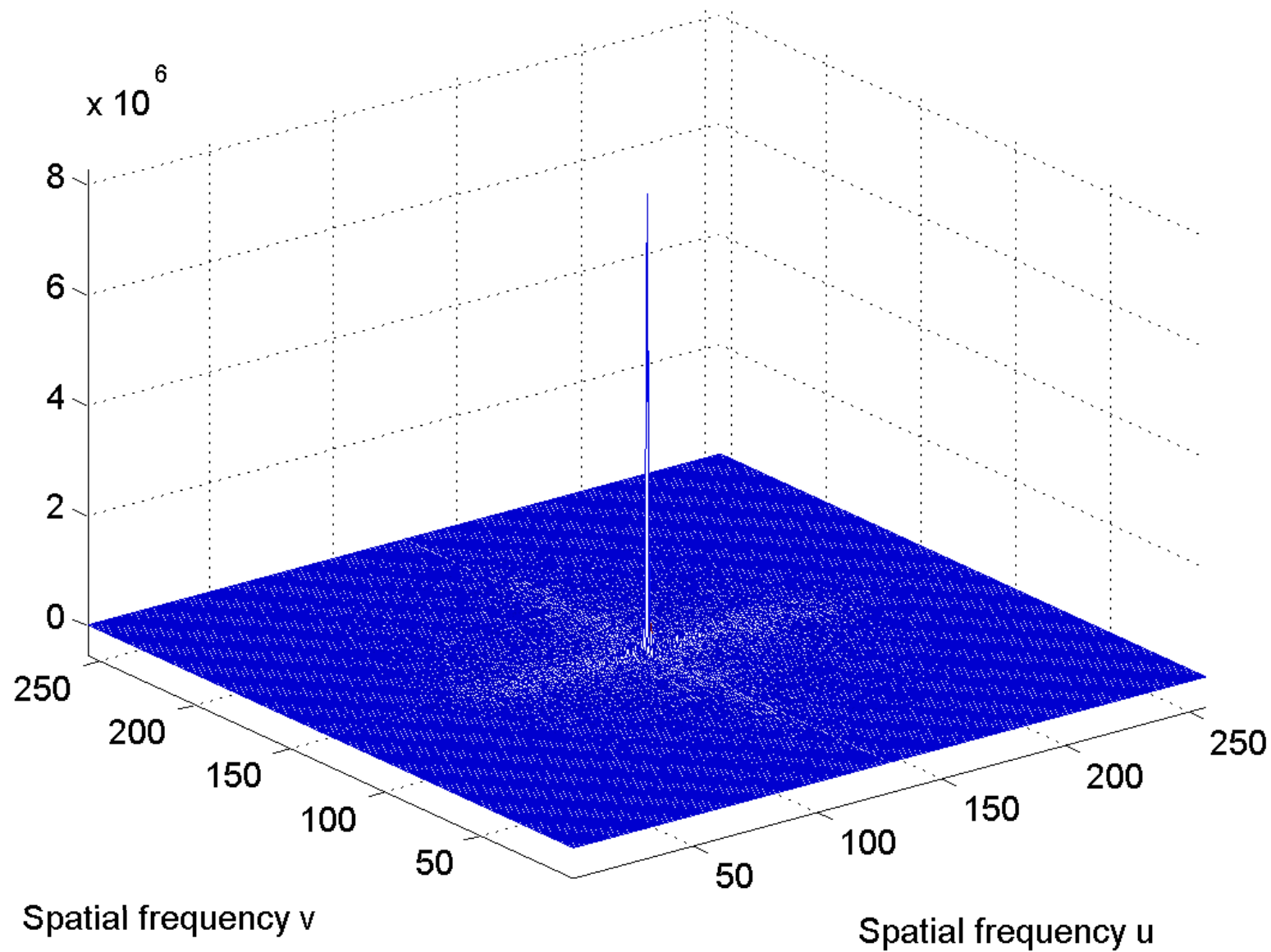


Real part of the spectrum, centered

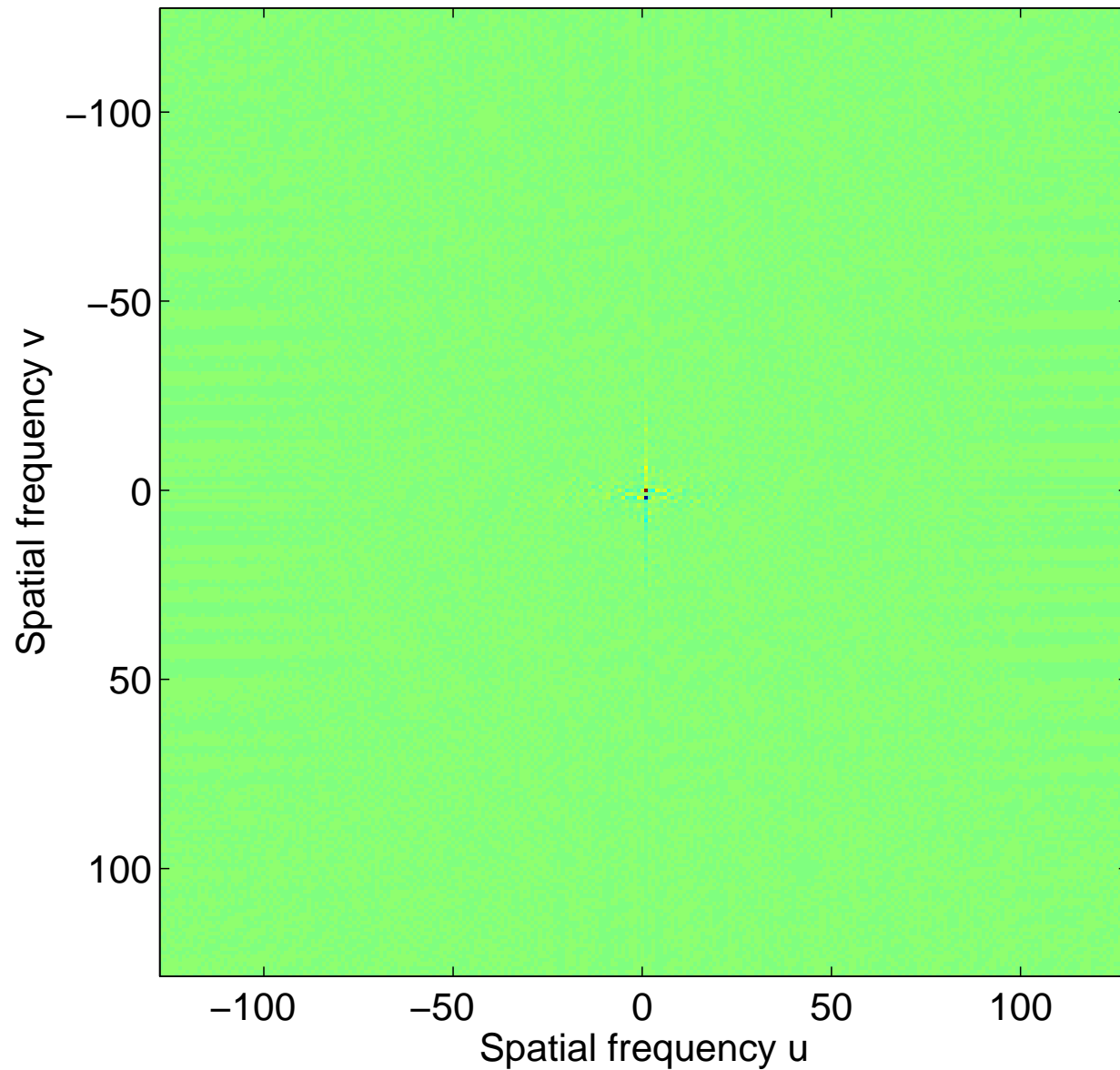




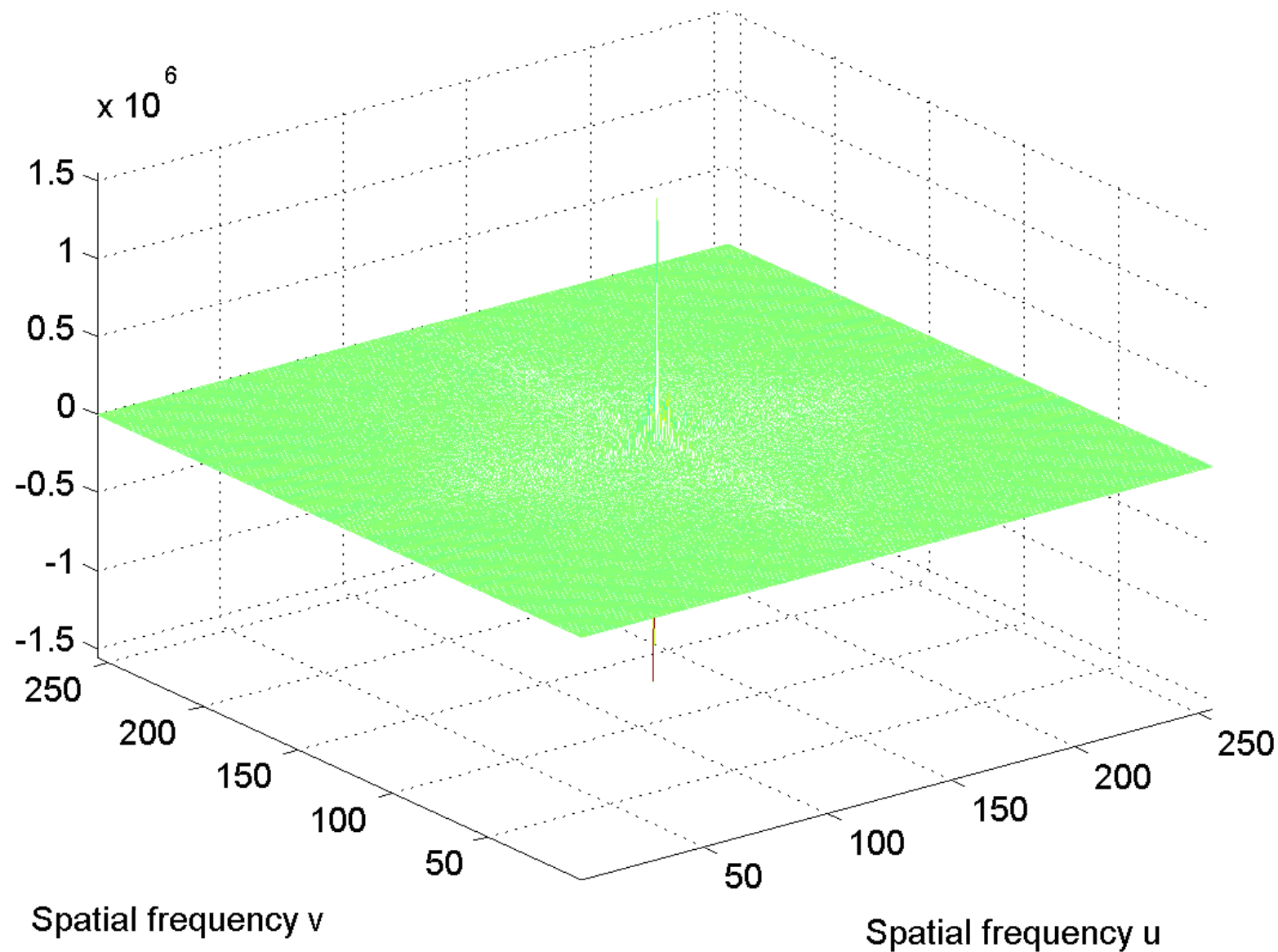
Real part of the spectrum, centered



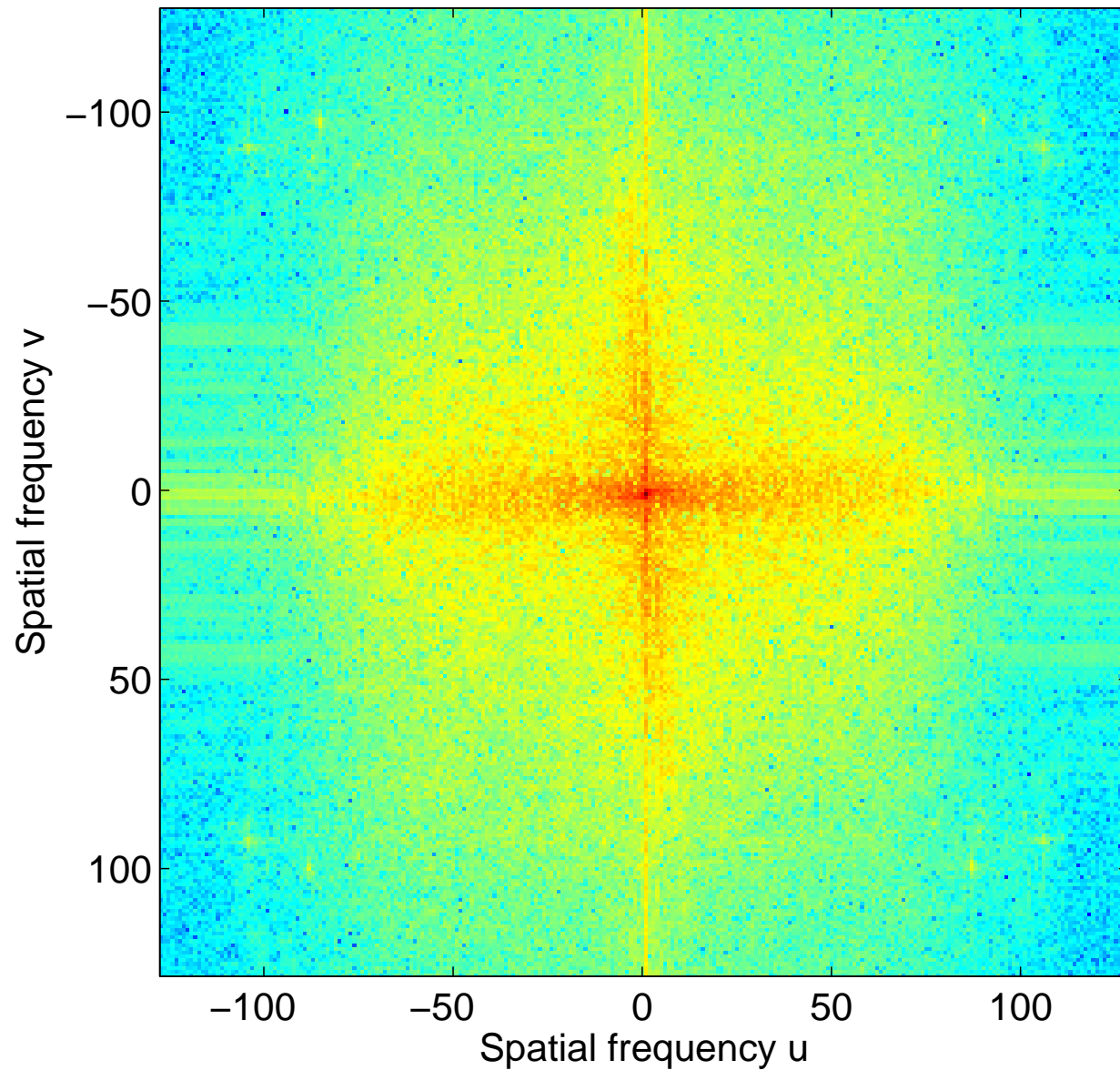
Imaginary part of the spectrum, centered



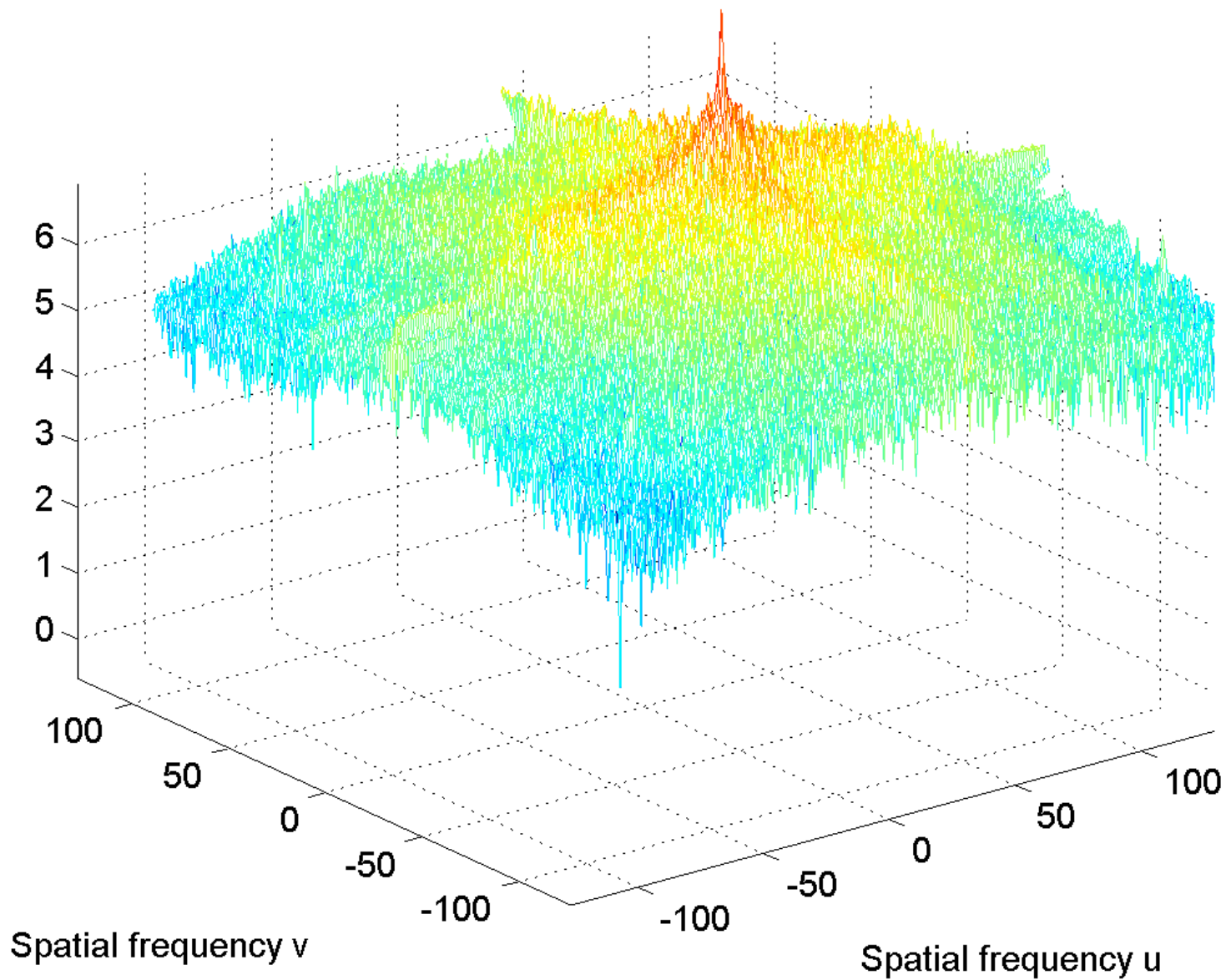
Imaginary part of the spectrum, centered

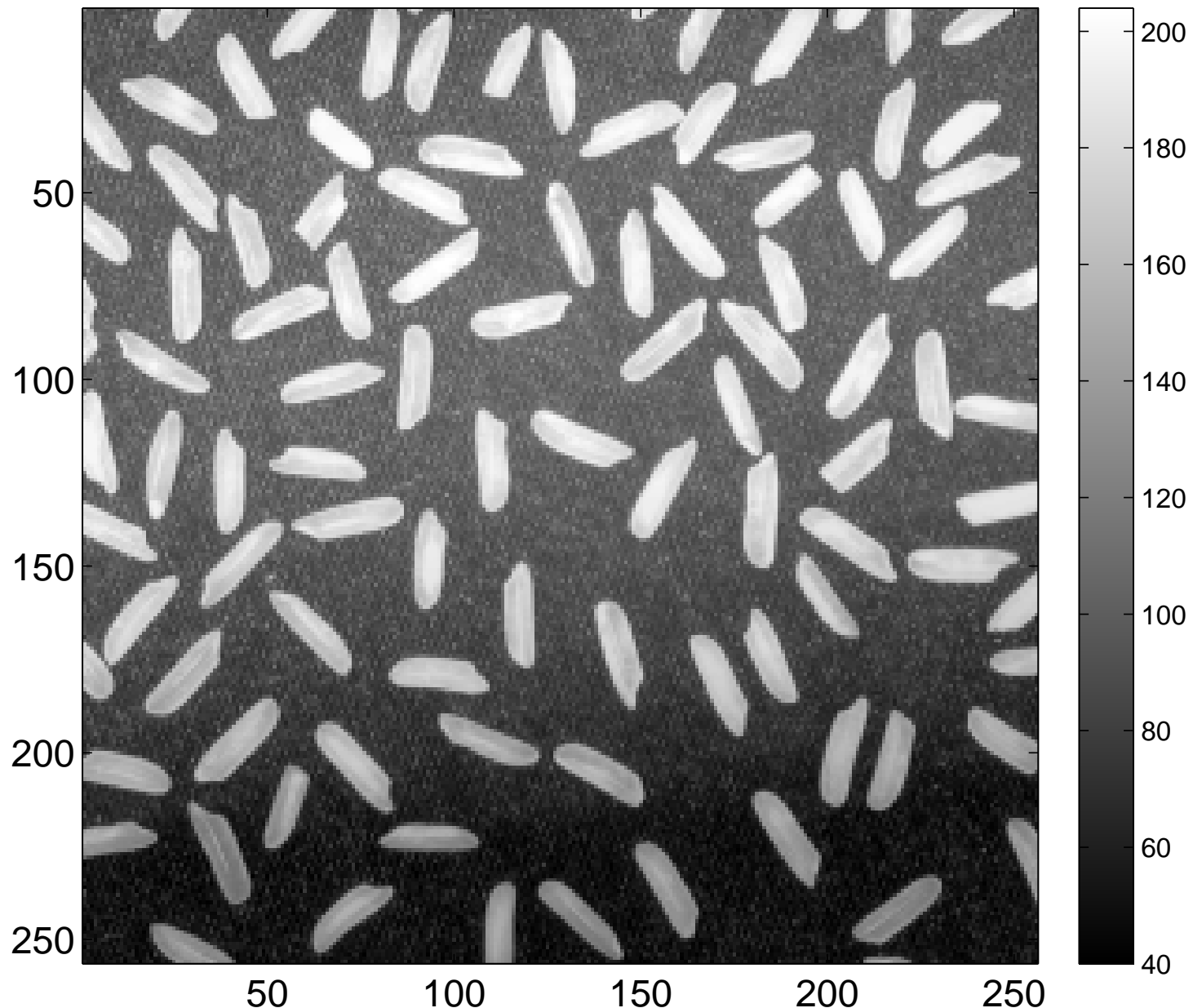


log power spectrum, centered

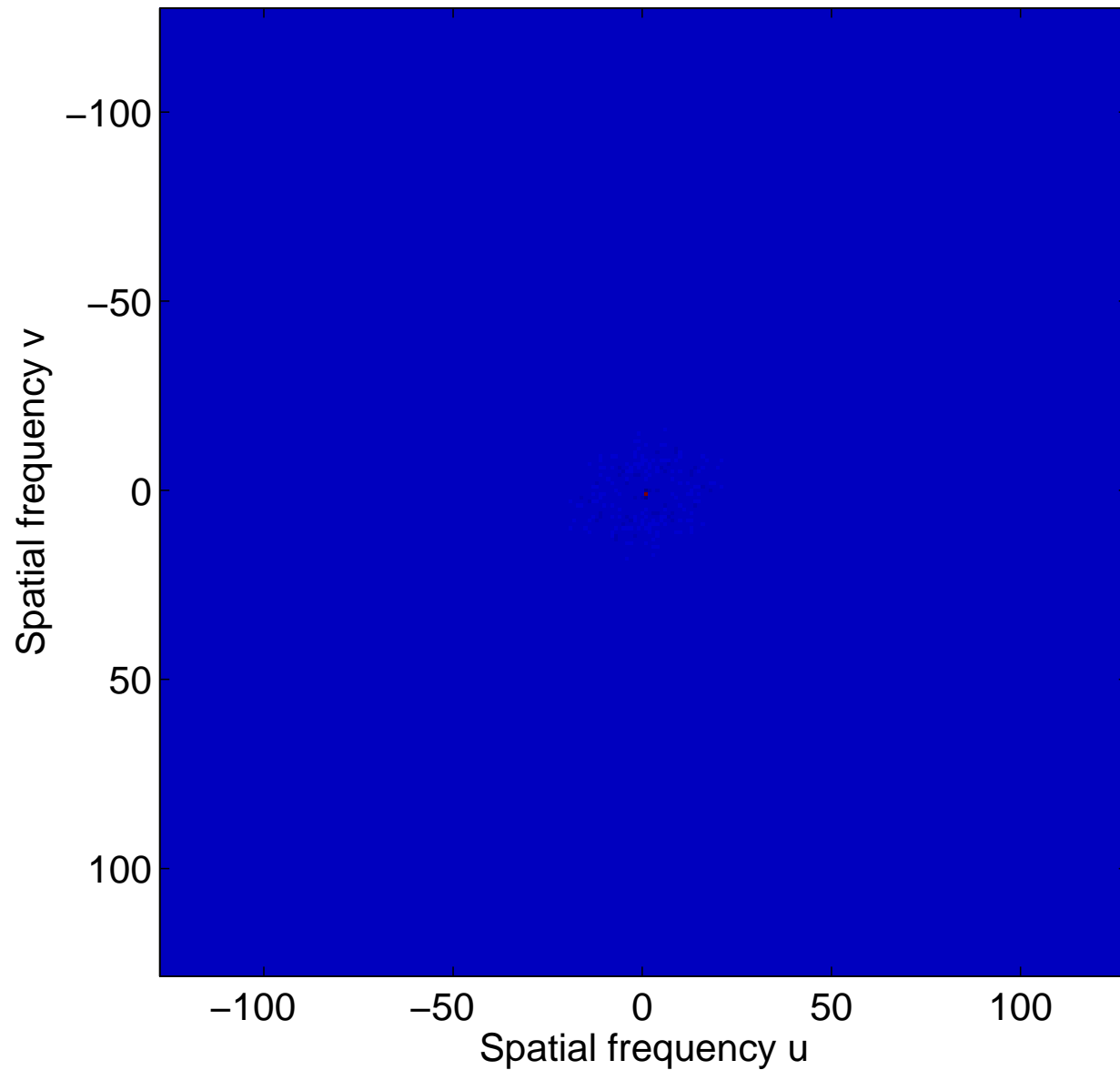


log power spectrum, centered

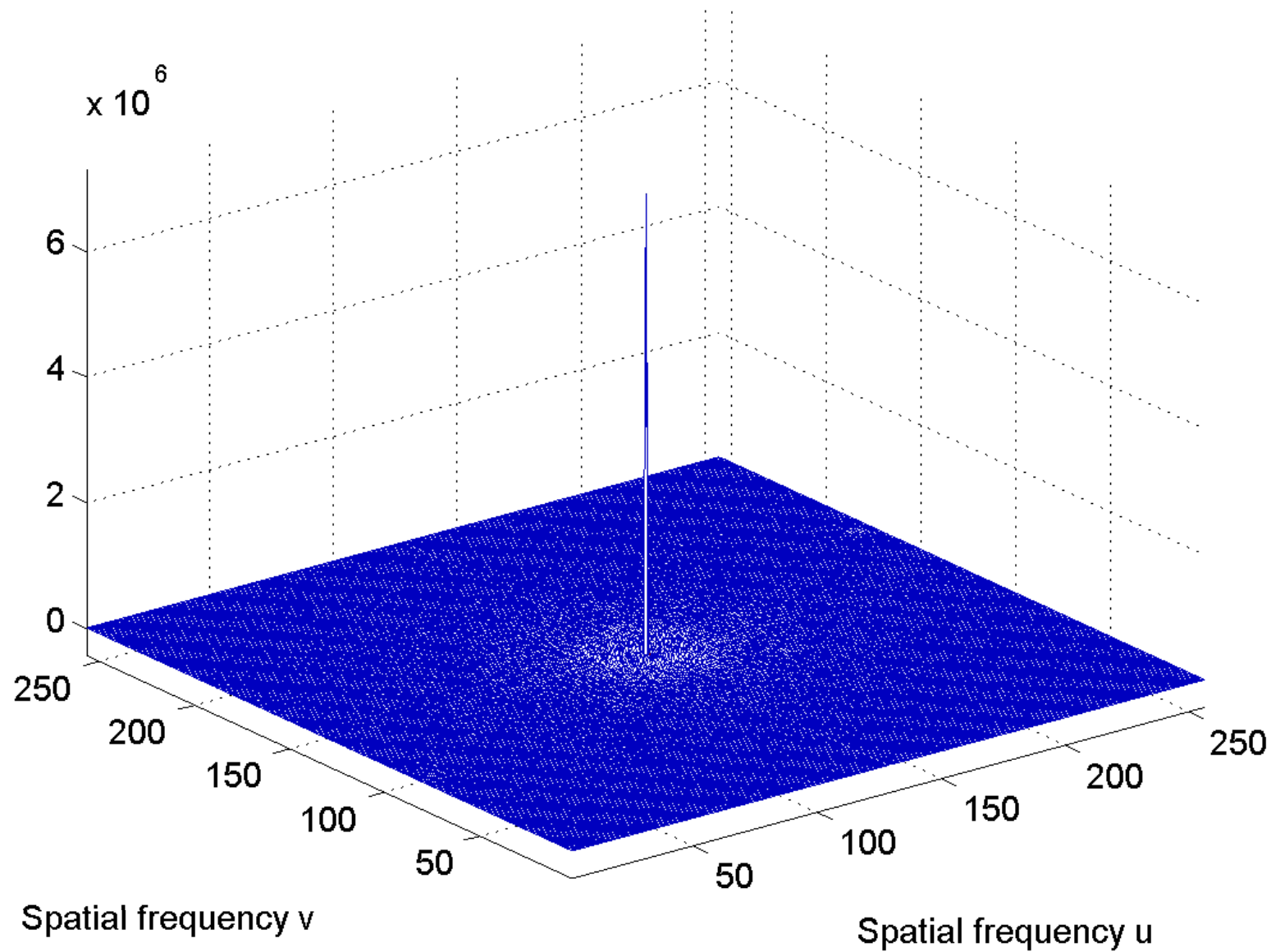




Real part of the spectrum, centered

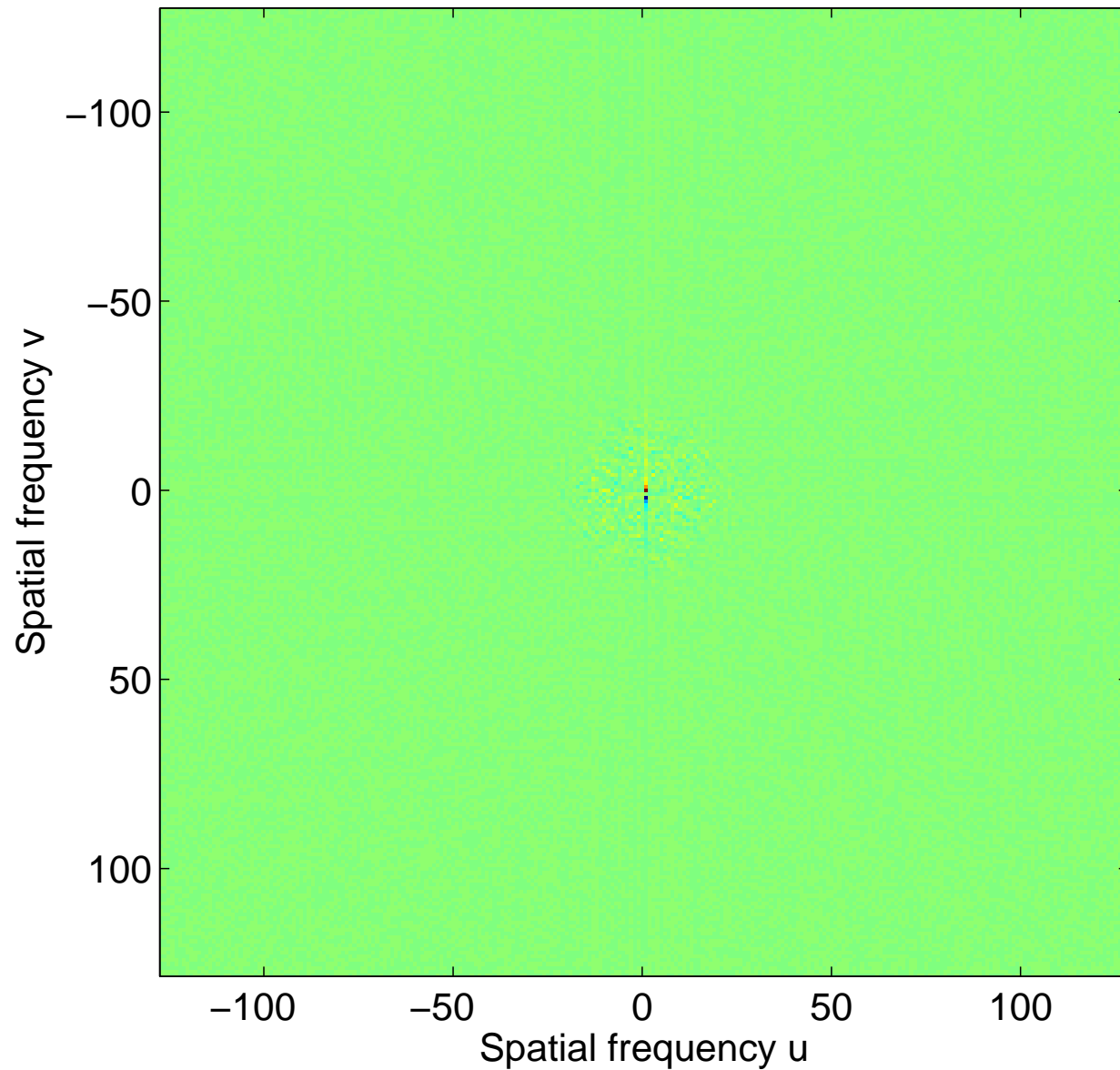


Real part of the spectrum, centered

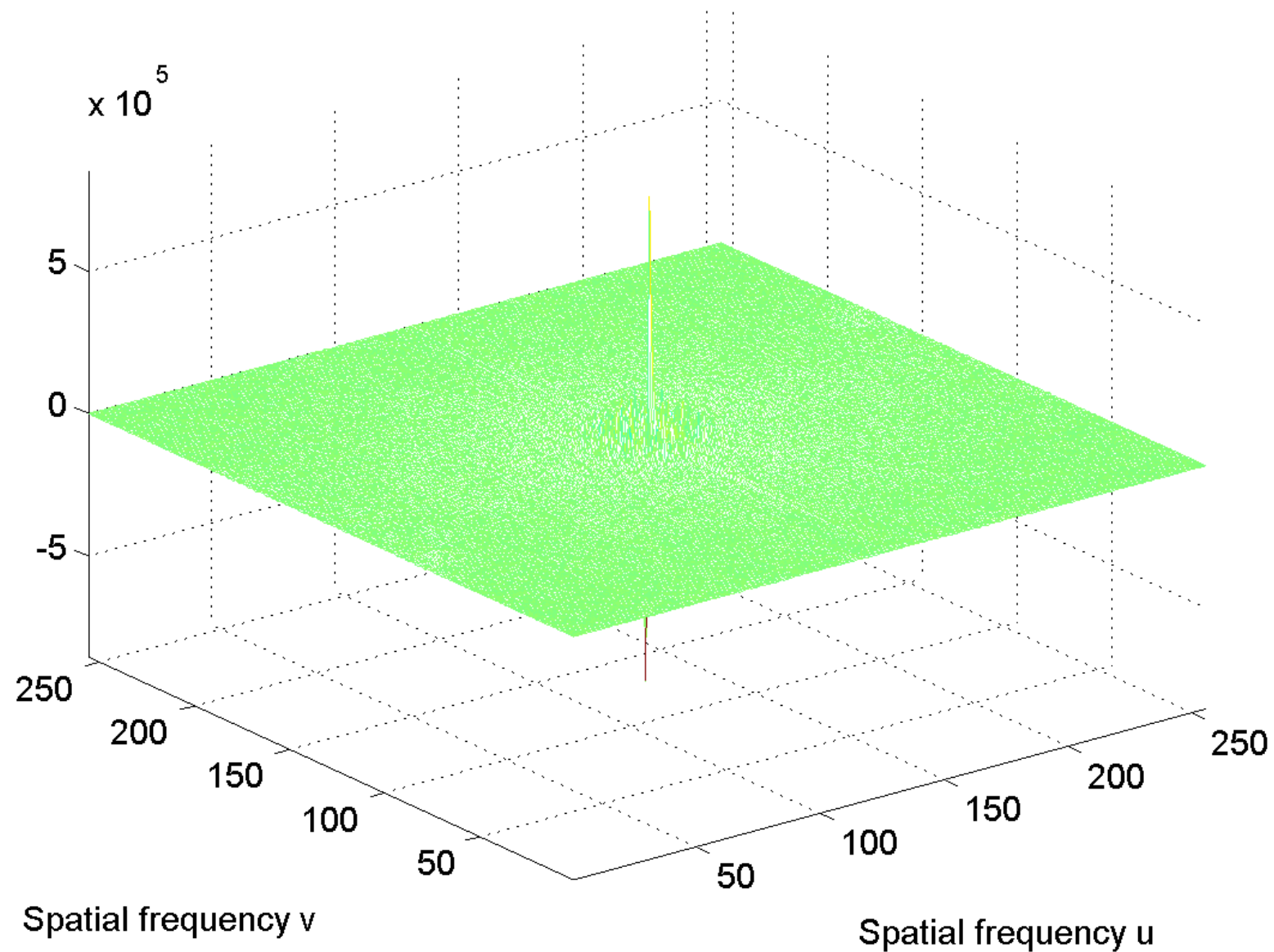




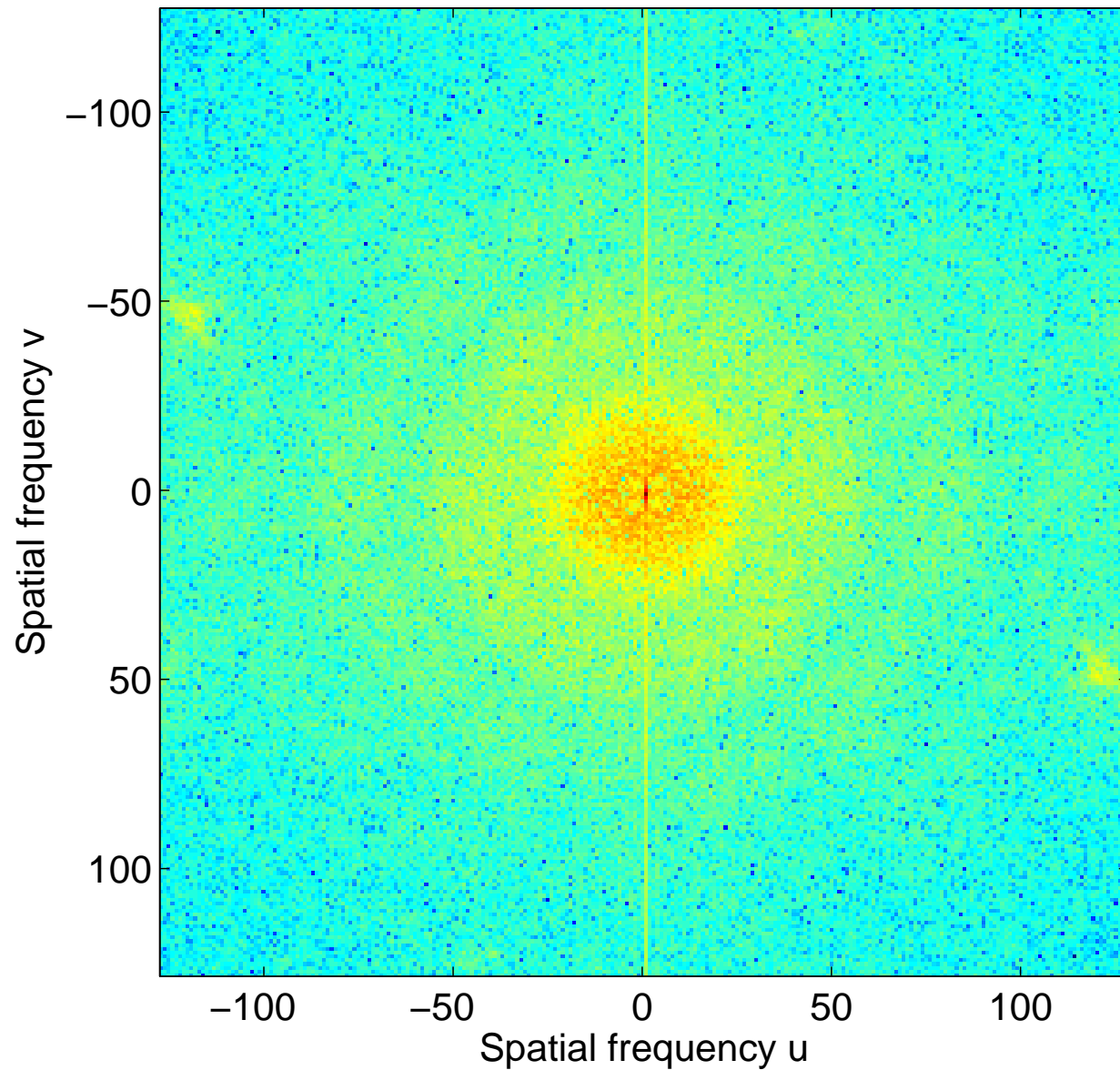
Imaginary part of the spectrum, centered



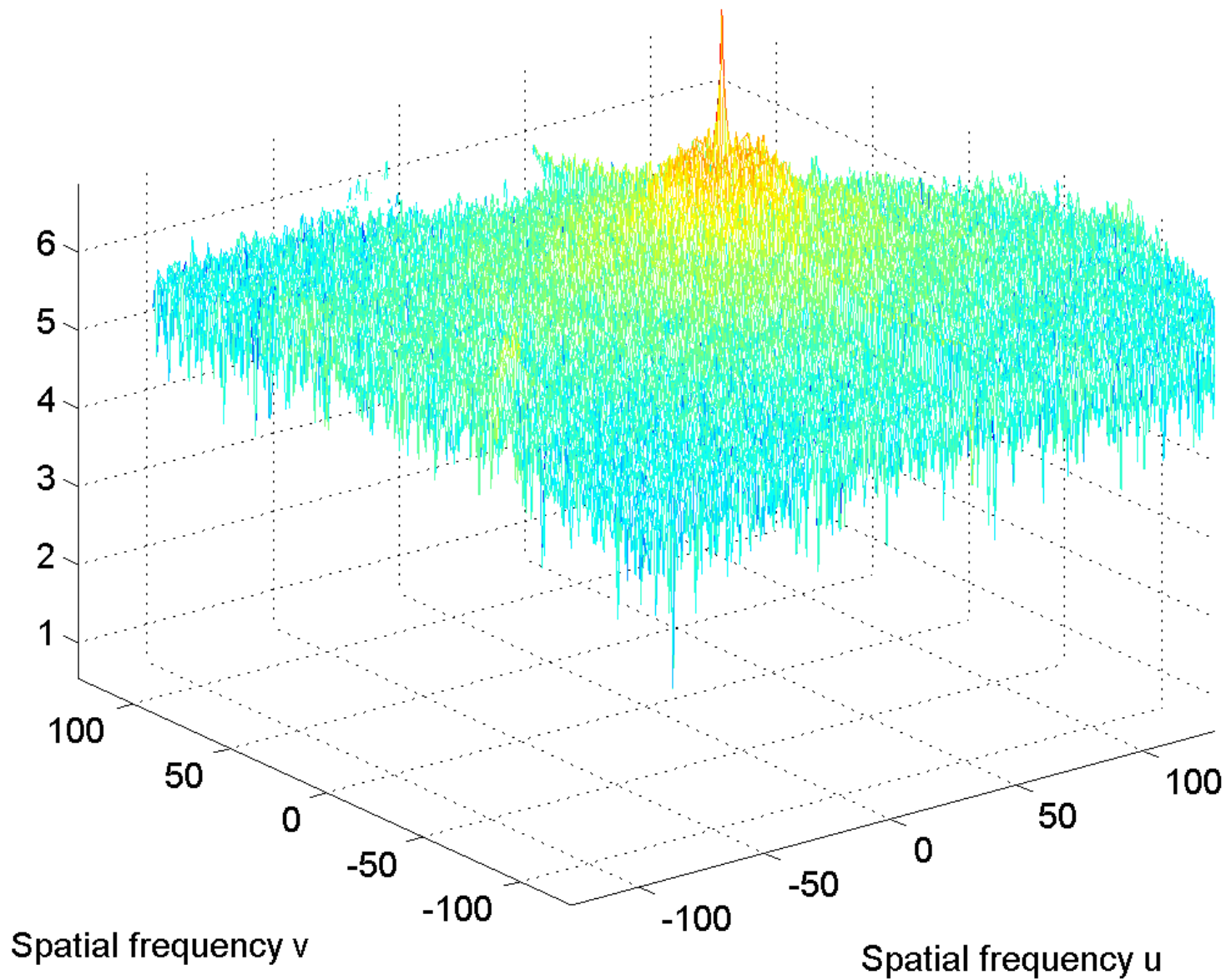
Imaginary part of the spectrum, centered

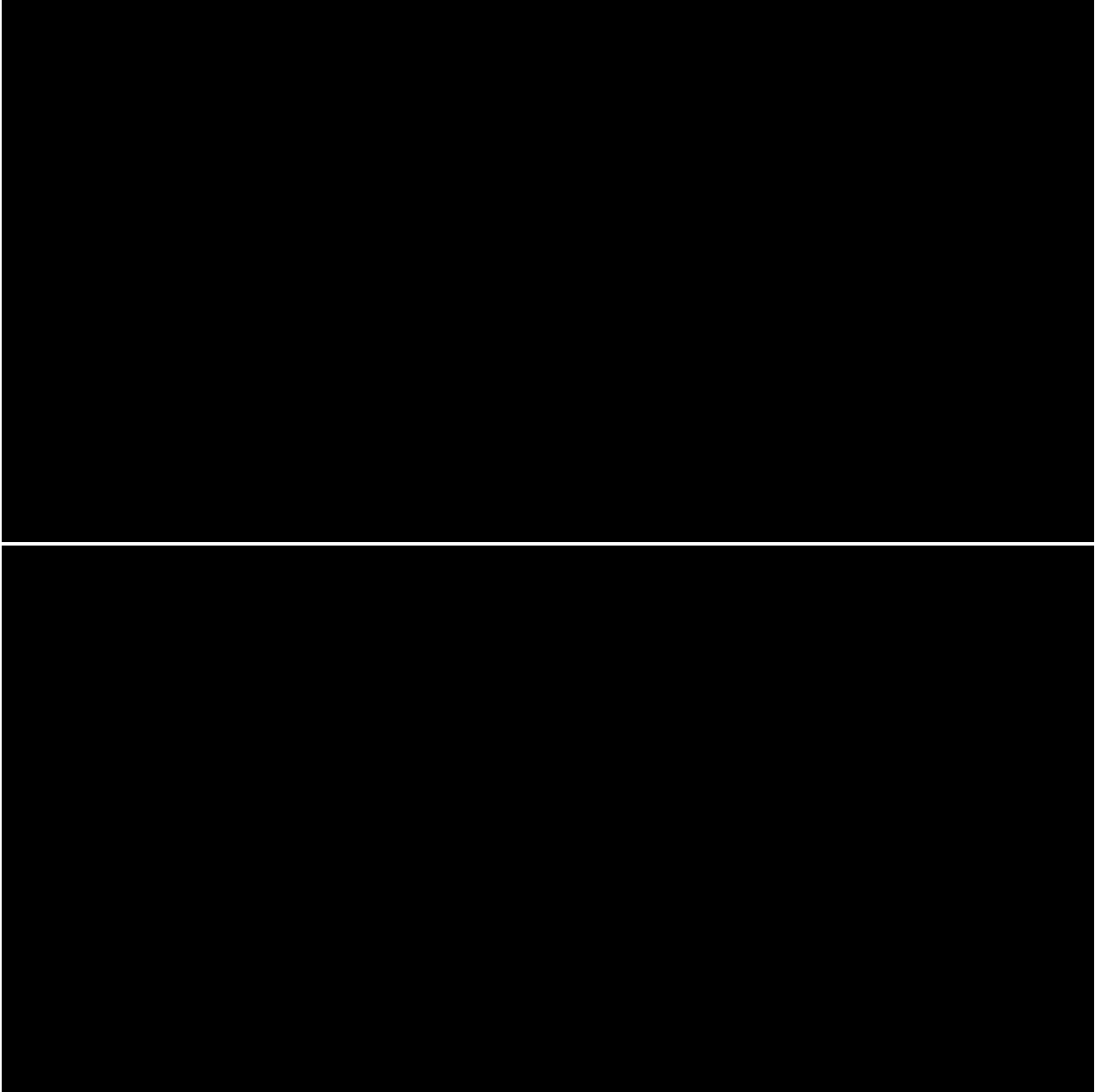


log power spectrum, centered

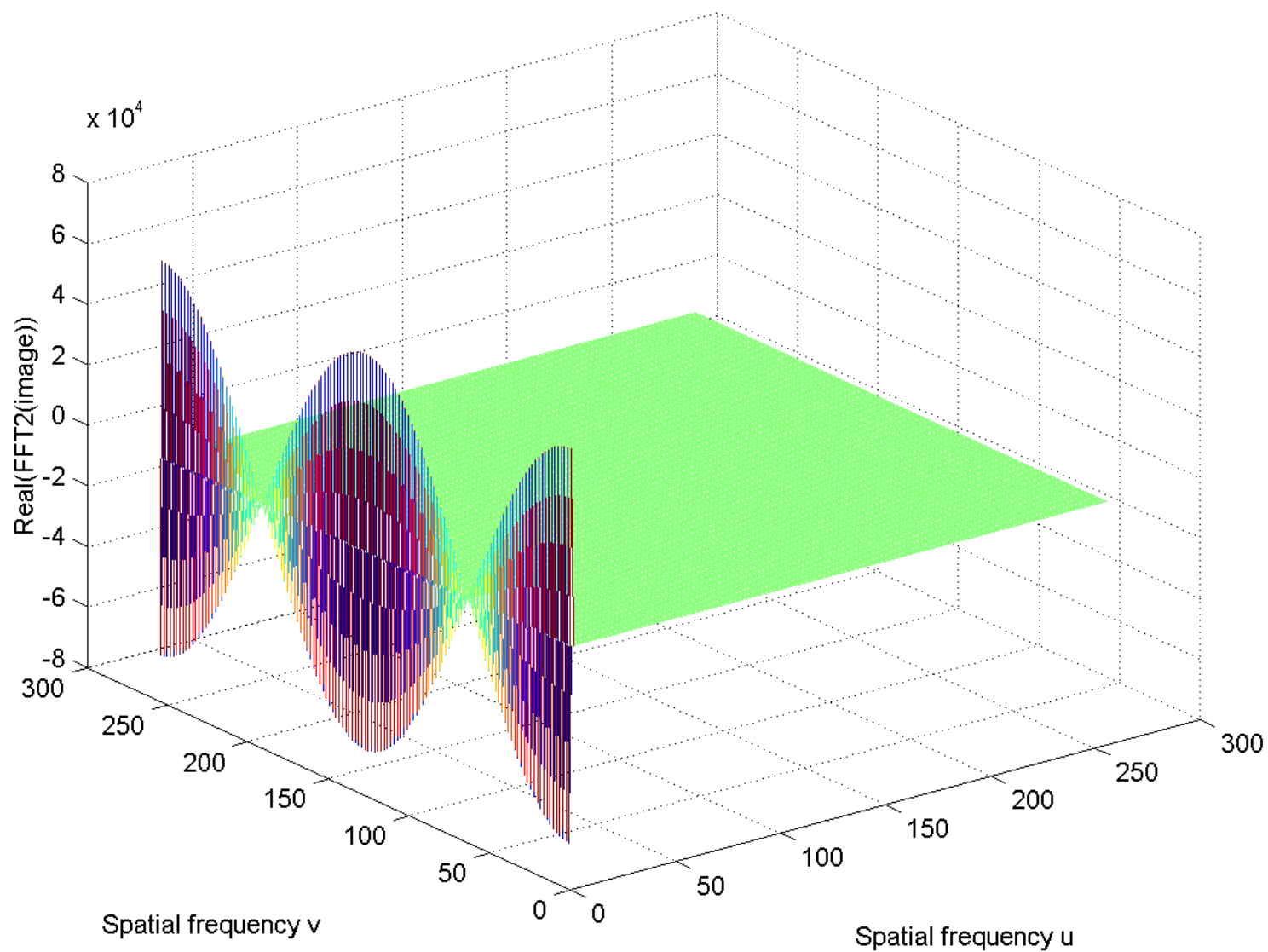


log power spectrum, centered

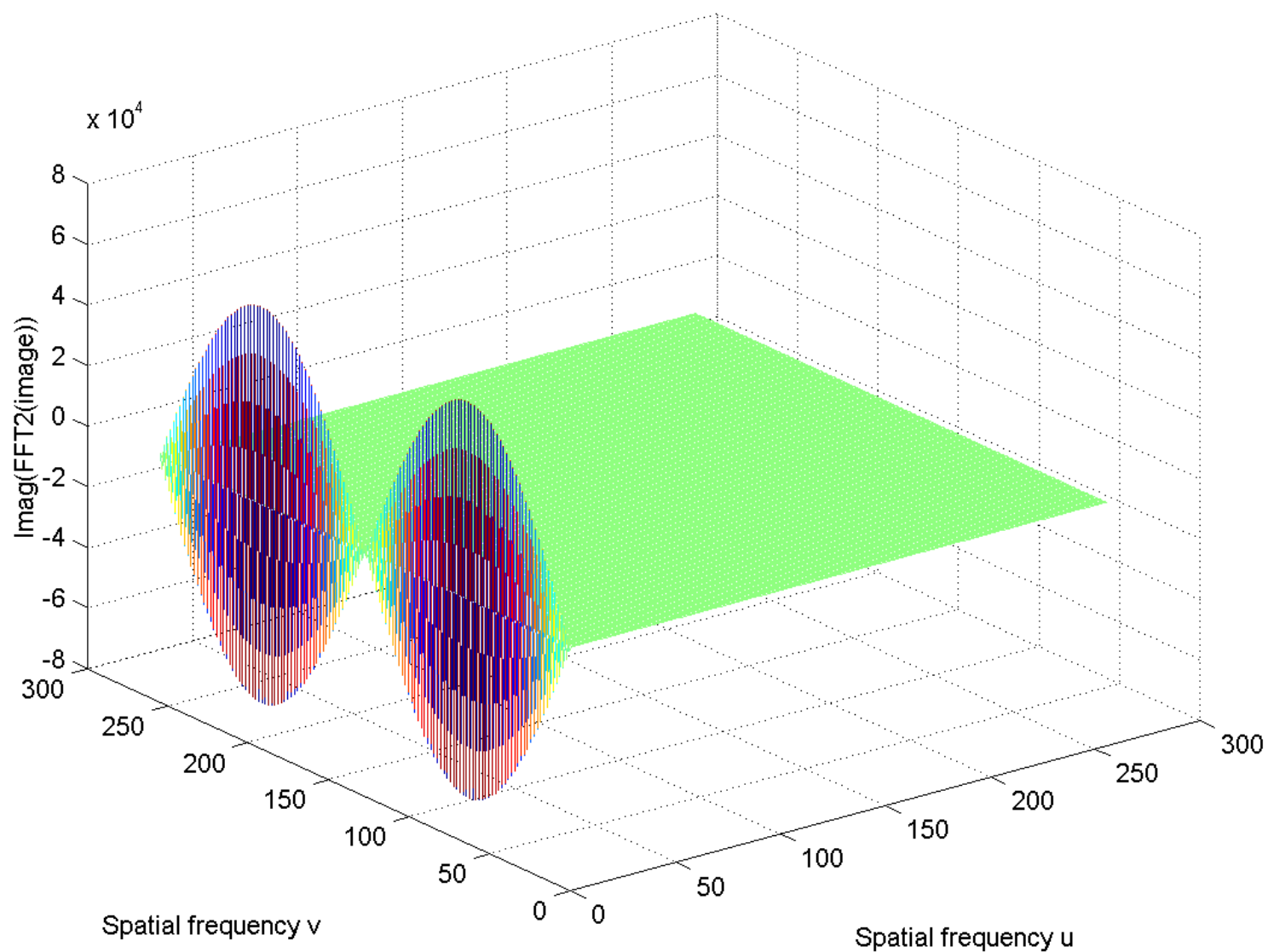




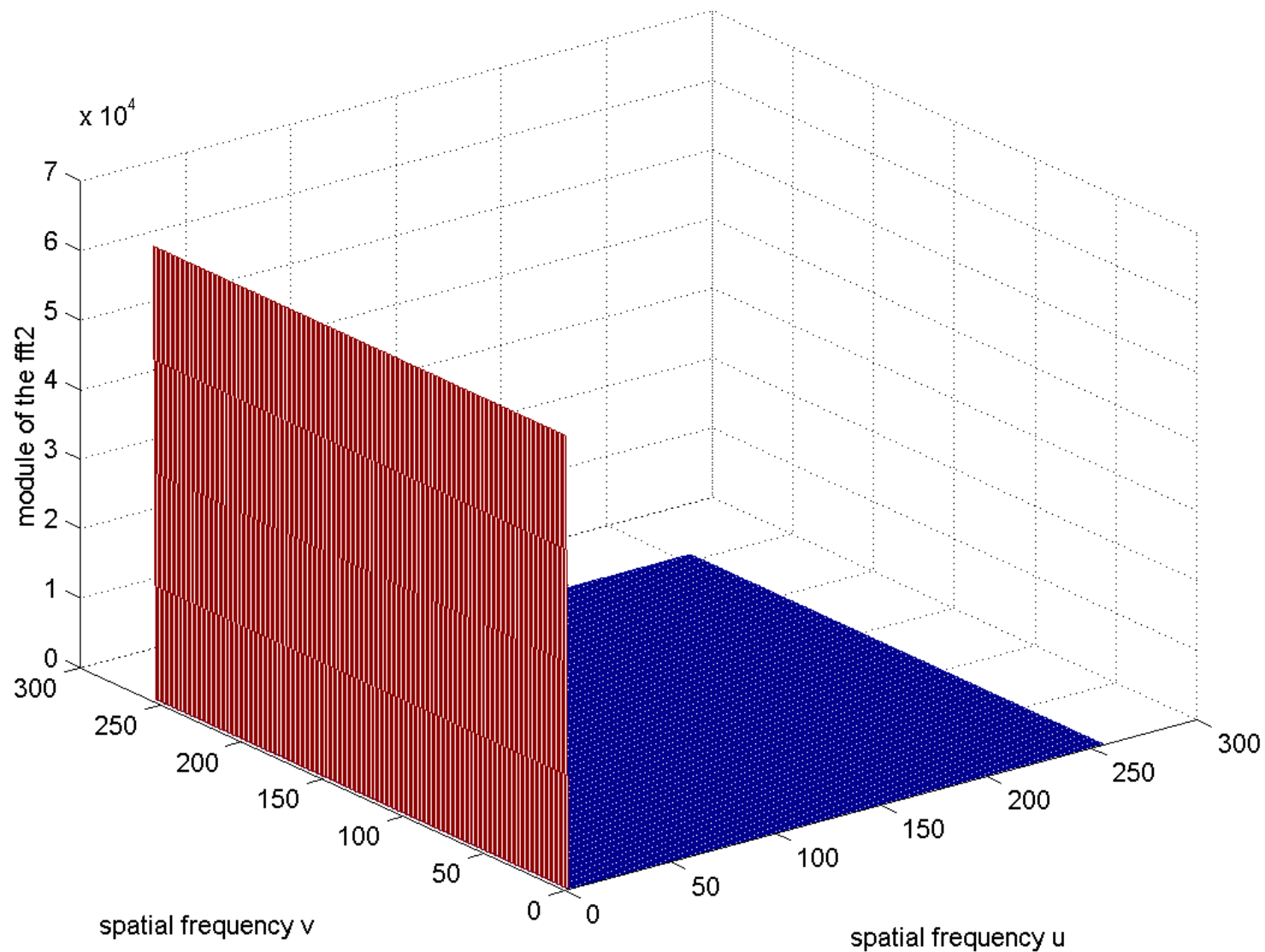
Frequency spectrum, real part of the FFT



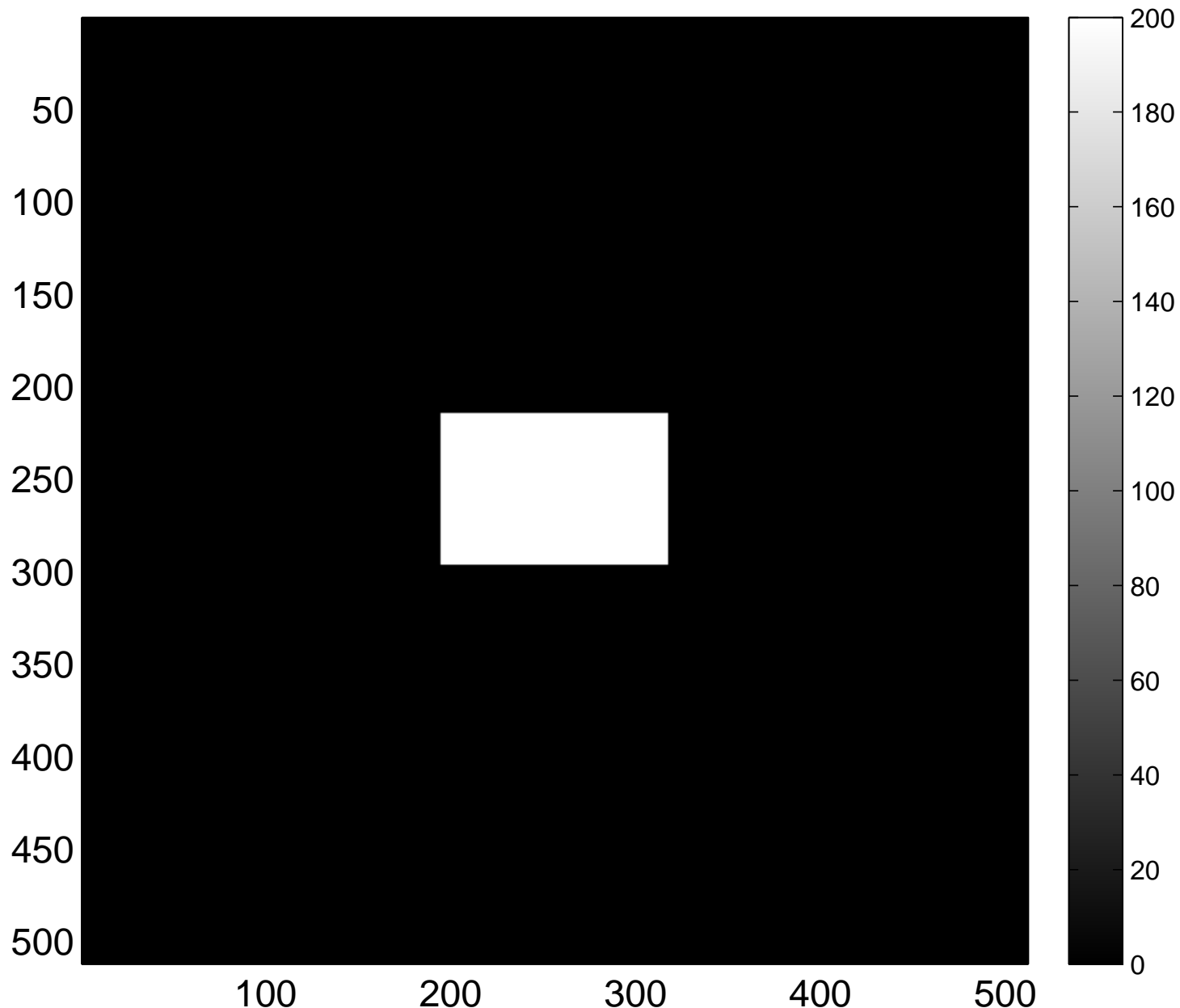
Frequency spectrum, imaginary part of the FFT



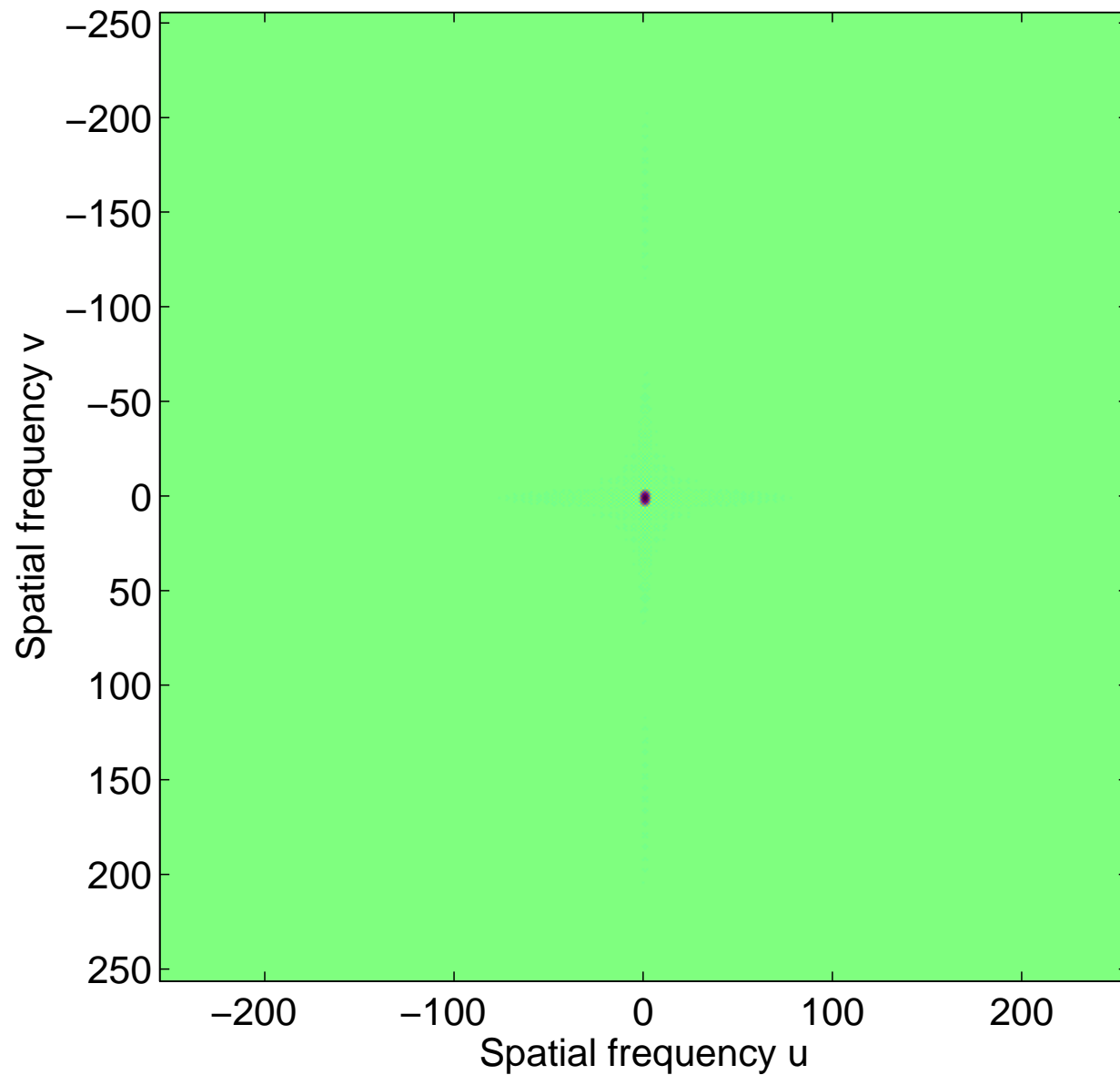
Power spectrum



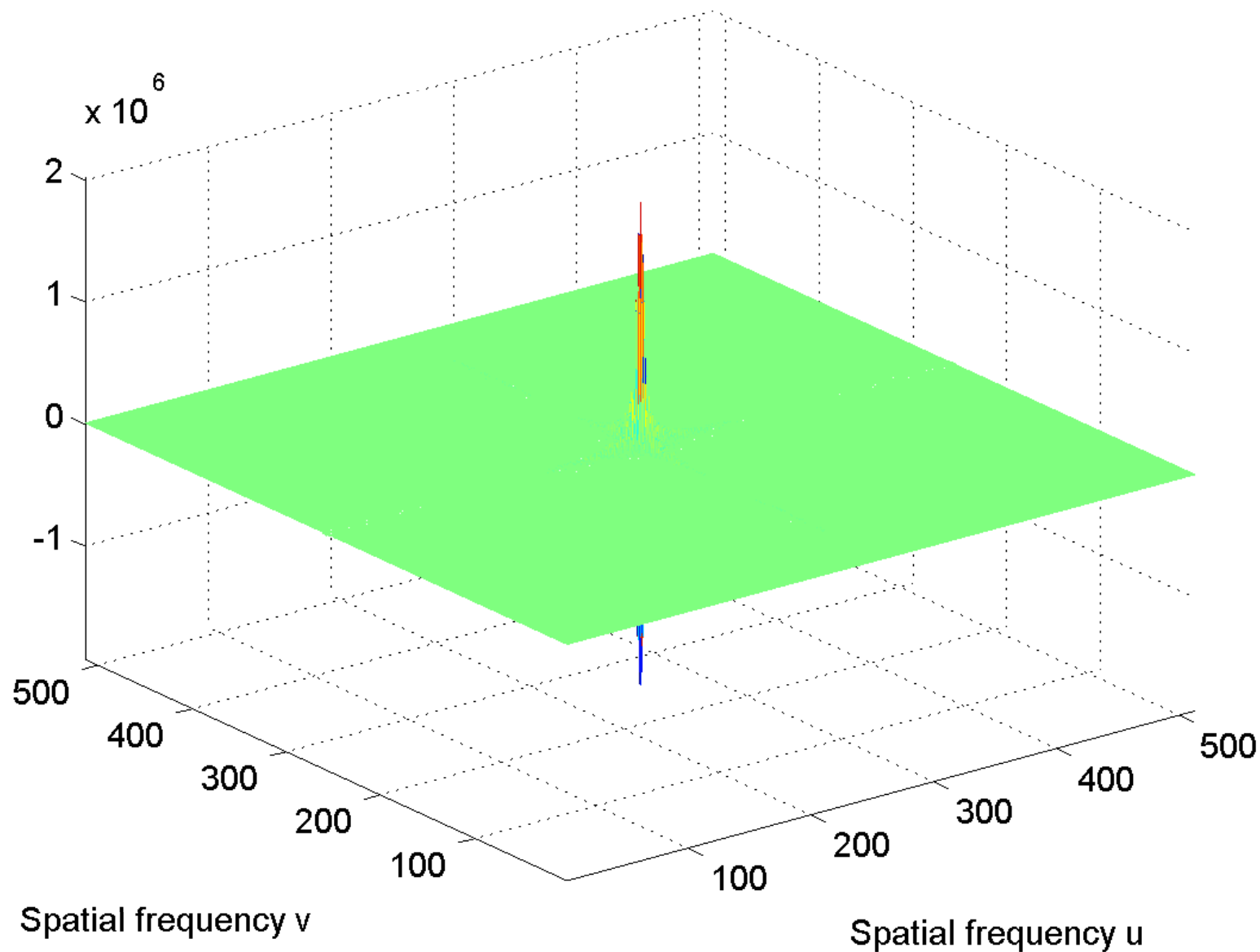




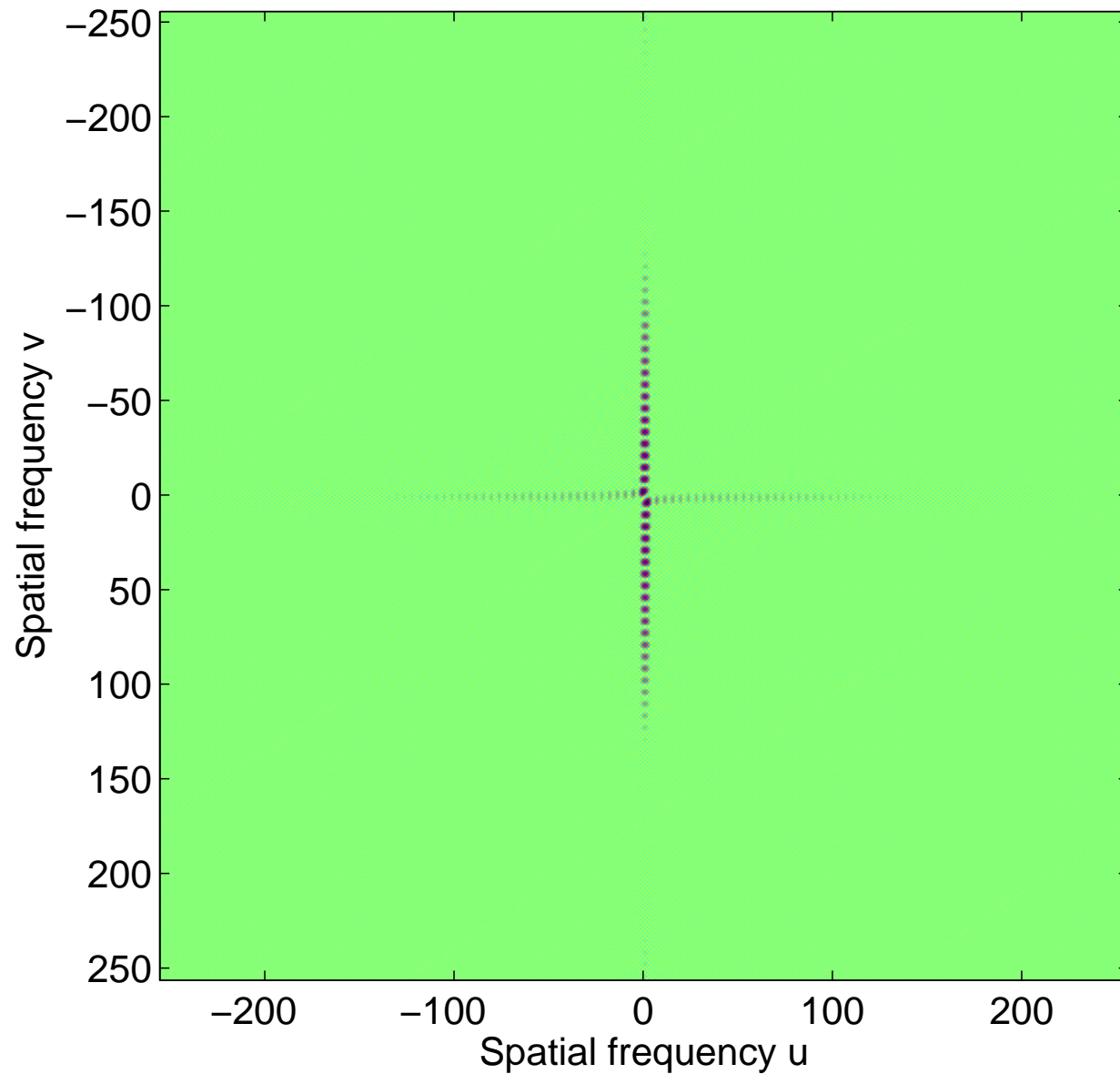
Real part of the spectrum, centered



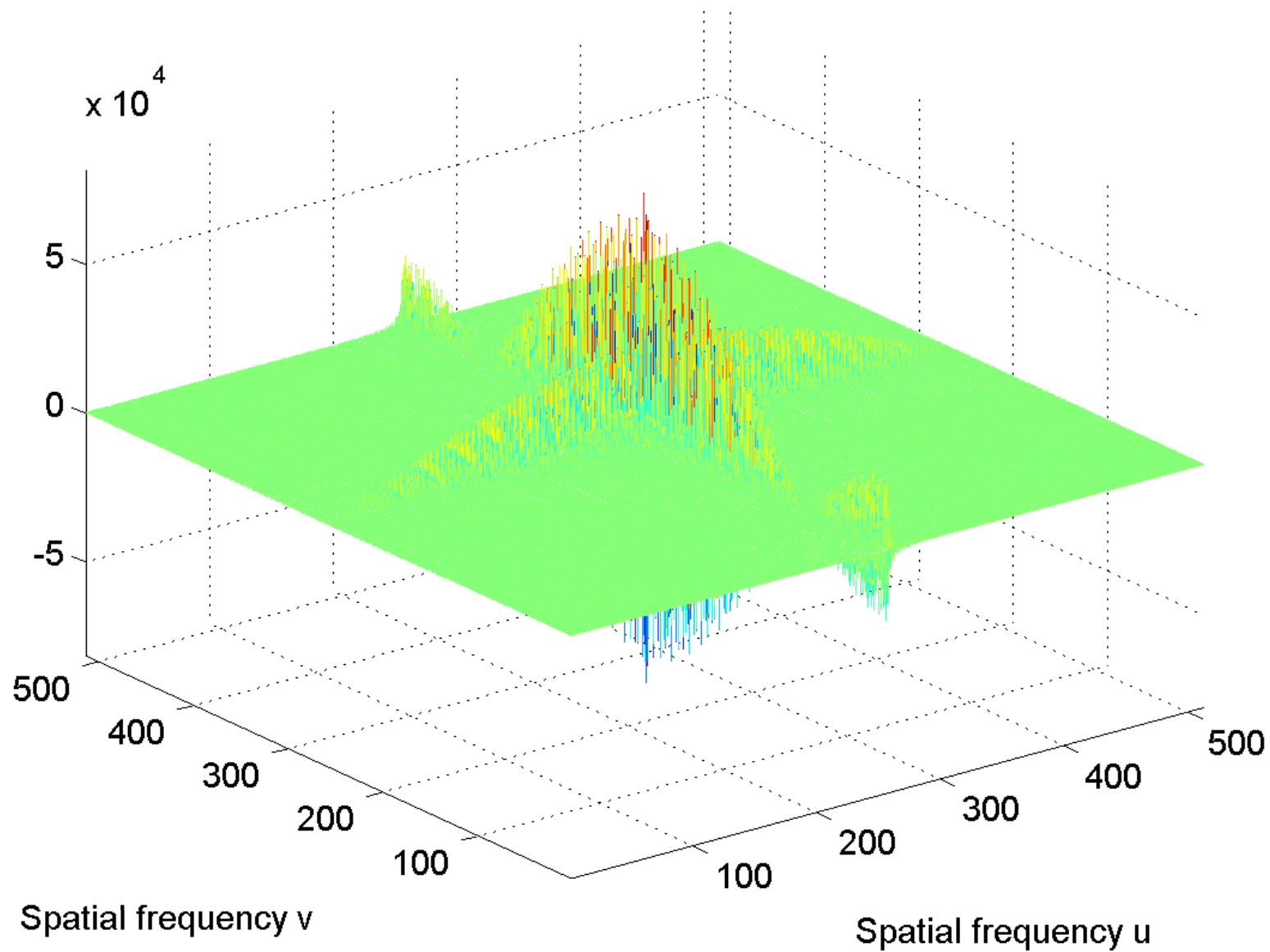
Real part of the spectrum, centered



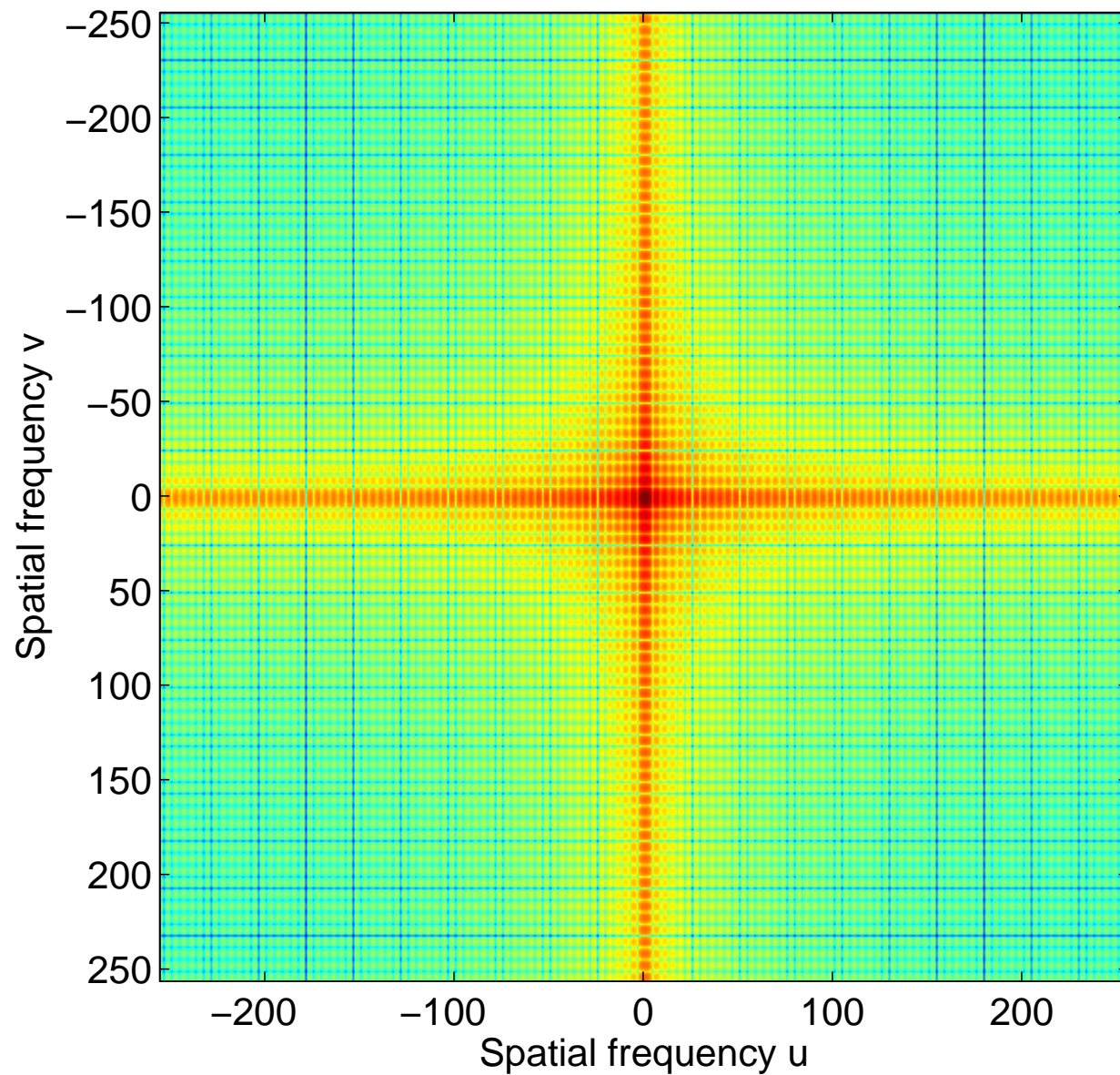
Imaginary part of the spectrum, centered



Imaginary part of the spectrum, centered



log power spectrum, centered



log power spectrum, centered

