Vlnková transformace

Václav Hlaváč

České vysoké učení technické v Praze
Český institut informatiky, robotiky a kybernetiky
160 00 Praha 6, Jugoslávských partyzánů 1580/3
http://people.ciirc.cvut.cz/hlavac, vaclav.hlavac@cvut.cz
také z Centra strojového vnímání, http://cmp.felk.cvut.cz

Nedostatky Fourierovy transformace

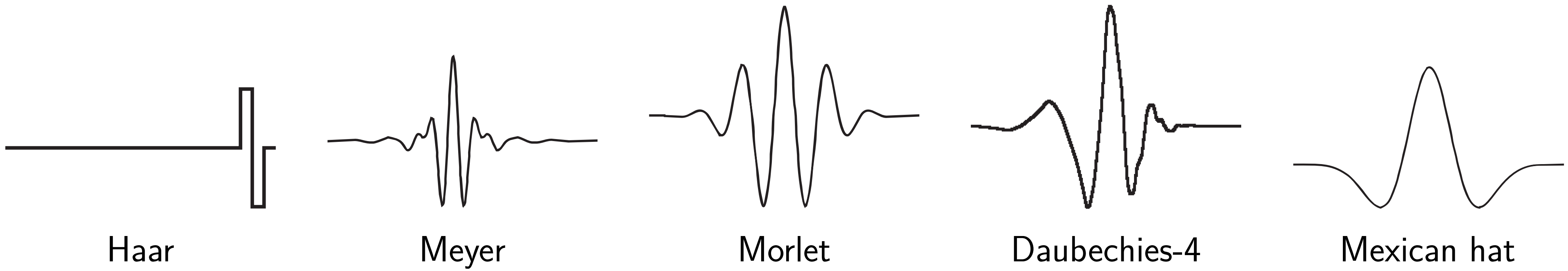
- Fourierova transformace a jí podobné mají podstatný nedostatek. K dispozici je frekvenční spektrum, ale neví se, v jakém *čase* v 1D (nebo v jakém místě *v obraze* ve 2D) se změna (událost) stala.
- Jedním řešením, jak změny (události) v signálu (obraze) lokalizovat, je použít krátkodobou Fourierovu transformaci. Při ní se signál rozdělí na malá okna, která se (lokálně) považují za periodická.
- Princip nejistoty je návodem, jak vybrat okna, aby negativní důsledky byly omezeny, tj. okna se mají napojovat na sousední okna plynule bez nespojitostí.
- Dilema volby okna zůstává. Důsledkem úzkého okna je špatná lokalizace ve frekvenční oblasti, zatímco široké okno zhoršuje lokalizaci v čase (místě v obraze).

Složitější bázové funkce – vlnky

- Vlnková transformace zachází dále než krátkodobá Fourierova transformace.
- Signál (obraz) se také analyzuje pomocí násobení funkcí okna a ortogonálním rozkladem podobně jako u jiných integrálních lineárních transformací.
- Posloupnost vlnek formálně reprezentuje kvadraticky integrovatelnou funkci přes úplnou, ortonormální množinu bázových funkcí zvanou vlnky (malé vlny).
- Reprezentace signálu (obrazu) je ve srovnání s Fourierou transformaci rozšířena ve dvou směrech.
  1. Použité bázové funkce (vlnky) jsou složitější než sinus a kosinus použité ve Fourierově transformaci.
  2. Signál (obraz) se analyzuje ve více měřítcích.

Vlnky

- Vlnky poskutují do jisté míry i lokalizaci v čase (prostoru).
- Přesná lokalicace jak v čase (prostoru) i frekvenci je nemožná díky principu nejistoty Wernera Heisenberga.
- Ilustrujme kvalitativně v 1D obrázkem tvar pěti často ve vlnkové transformaci používaných bázových funkcí (mateřských vlnek).



Různá měřítka

- Vymodelovat ostrou špičku na průběhu funkce (např. bodový šum v obraze) pomocí součtu většího množství funkcí je těžké právě kvůli ostré lokalitě špičky.
- Pro tuto aproximační úlohu se hodí funkce, které jsou samy lokální.
- Tyto přirozeně lokální funkce jsou vhodné pro reprezentaci špiček na průběhu funkce, a to právě pomocí vlnek. Reprezentace ostrých špiček a nespojitostí na průběhu funkce spotřebuje méně vlnek než sinusovek a kosinusovek ve Fourierově transformaci.
- Lokalizace v čase (prostoru) spolu s lokaliací vlnek v oboru frekvencí poskytuje řídkou reprezentaci mnoha prakticky zajímavých signálů (obrazů).

- Řídkost reprezentace otevírá cestu k úspěšným aplikacím při kompresi dat/obrazů, filtraci šumu, detekci zajímavých míst v obrazech, atd.

Rodičovské a dceřinné vlnky

Mateřská vlnka Ψ, vlnková funkce

- určuje základní vlnku její tvar;
- pokrývá celý definiční obor, který nás zajímá.

Otcovská vlnka Φ, poskytuje funkci určující měřítko,

- vytváří ze základní vlnky další vlnky různého měřítka;
- dovoluje vyjádřit detaily aproximované funkce, které nás zajímají.

Ostatním odvozeným vlnkám se říká dceřinné vlnky.

- Dceřinné vlnky se odvozují z rodičovských vlnek, a to pomocí
- generující (bázové) funkce $\Psi_{s,\tau}(x)$, kde
  - s určuje měřítko vlnkové funkce,
  - τ určuje posun vlnkové funkce.

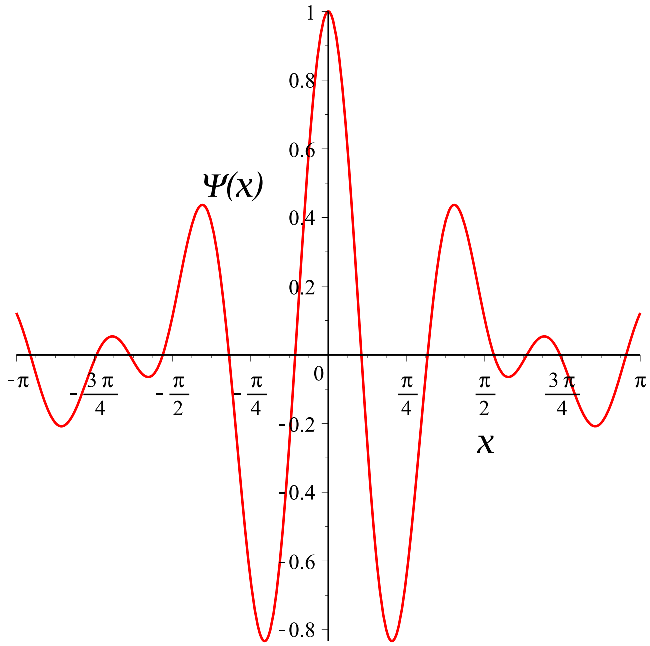
Spojitá vlnková transformace (CWT)

- Nyní uvažujme spojité změny posunu a měřítka.
- Daný vstupní signál o konečné energii se zobrazí na spojitou řadu frekvenčních pásem (ve smyslu funkcionální analýzy na podprostory L^p).
- Signál může být například reprezentován v každém frekvenčním pásmu ve tvaru $[f, 2f]$ pro všechny kladné frekvence $f > 0$.
- Vstupní signál se může rekonstruovat integrací přes všechny frekvenční složky.
- Frekvenční pásma jsou různými měřítky změněná z výchozího podprostoru v měřítku 1.
- Tyto podprostory jsou vytvářeny pomocí posunu z jedné funkce, a to mateřské vlnky Ψ.

Mateřská vlnka, ilustrační příklad

Ukažme Shannonovu mateřskou vlnku v jednom frekvenčním pásmu $[1, 2]$,

$$\Psi(t) = \frac{\sin(2\pi t) - \sin(\pi t)}{\pi t}\,.$$



1D spojitá vlnková transformace

- Funkce $f(t)$ se rozloží s využitím množiny generujících (bázových) funkcí $\Psi_{s,\tau}(t)$. Říká se jim vlnky (angl. wavelets)

$$c(s,\tau) = \int_R f(t)\, \Psi^*_{s,\tau}(t)\, \mathrm{d}t\,, \quad s \in R^+ - \{0\}\,, \quad \tau \in R\,.$$

  $c(s,\tau)$ jsou koeficienty vlnkové transformace (analogie koeficientů spektra u FT). Komplexně sdruženou funkci označuje *.
- Dolní indexy označují: s měřítko, τ posun.
- Vlnky se vytvářejí z jediné mateřské vlnky $\Psi(t)$ změnou měřítka s a posunem τ; $s > 1$ zvětšuje, $s < 1$ zmenšuje příslušný signál,

$$\Psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\,\Psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)\,.$$

- Koeficient $1/\sqrt{s}$ je použit pro normalizaci energie vlnky při změně měřítka.

Význam koeficientů $c(s, \tau)$ u vlnkové transormace

- Integrál $\int_R f(t)\, \Psi^*_{s,\tau}(t)\, \mathrm{d}t$ z předchozí průsvitky můžeme interpretovat jako skalární součin signálu $f(t)$ a příslušné vlnky (generující funkce, také bázové funkce) $\Psi^*_{s,\tau}(t)$.
- Tento skalární součin určuje, do jaké míry je tvar signálu podobný (korelovaný) s lokální sondou danou příslušnou vlnkou.
- Při skutečném použití se prostor měřítek s a posunů τ diskretizuje, a tak se zavede diskrétní vlnková transformace (angl. discrete wavelet transformation DWT). Touto diskretizací se budeme zabývat později.

Inverzní spojitá vlnková transformace

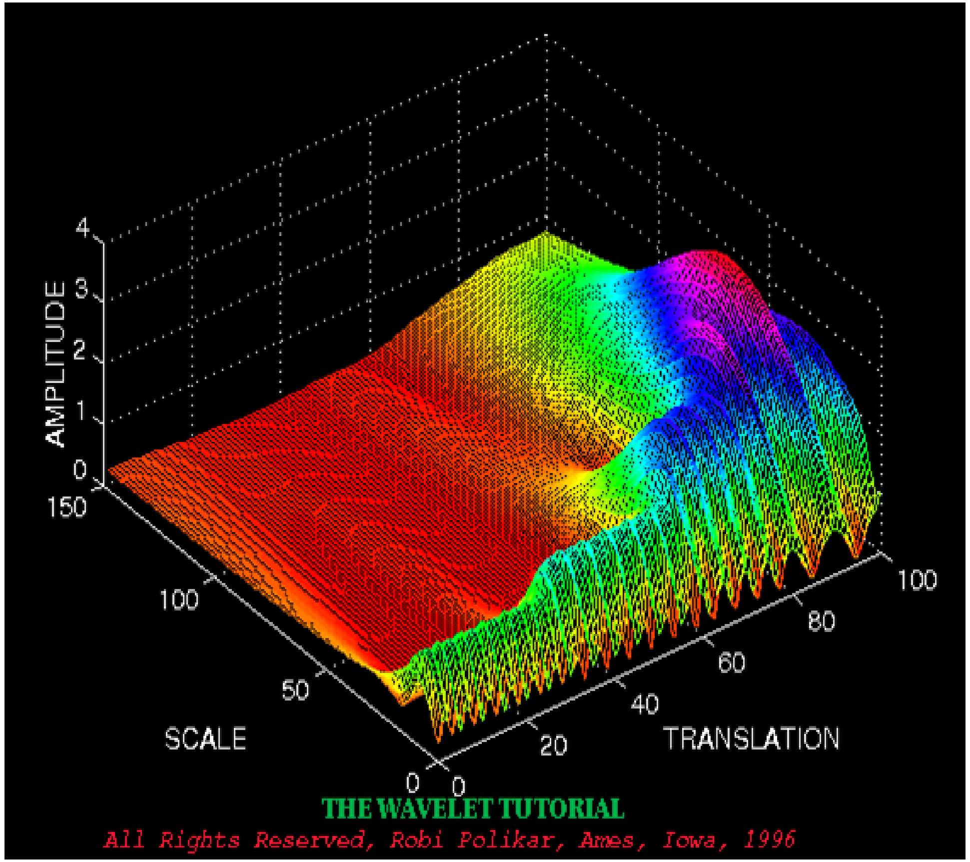
- Inverzní spojitá vlnková transformace slouží k rekonstrukci 1D signálu $f(t)$ s využitím koeficientů vlnkové transformace $c(s,\tau)$,

$$f(t) = \int_{R^+} \int_{R} c(s,\tau)\, \Psi_{s,\tau}(t)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}\tau\ .$$

- Poznámka:
  Vlnkovou transformaci jsme zavedli obecně bez potřeby zavést určitou mateřskou vlnku Ψ.
  Uživatel si může zvolit mateřskou vlnku Ψ podle svých potřeb a praktického použití.
  Z mateřské vlnky vzniknou generující (též bázové) funkce $\Psi_{s,\tau}(t)$.

- Koeficienty vlnkové transformace $c(s,\tau)$ jsou analogií frekvenčního spektra (spektrogramu) ve Fourierově transformaci, což ilustruje následující průsvitka.

Příklad vlknového “spektrogramu”



Q: Může být libovolná funkce mateřskou vlnkou?
A: Nemůže.

- Mateřská vlnka musí oscilovat,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t)\,\mathrm{d}\,t = 0\,.$$

- Mateřská vlnka musí mít konečnou energii,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(t)|^2 \mathrm{d}\,t < \infty\,.$$

Srovnání vlnkové a Fourierovy transforamce

- Vlnková transformace: spektrální informace o 'frekvencích' a částečně lokalizace jevů v čase (v prostorových souřadnicích ve 2D).
- Fourierova transformace: pouze spektrální informace (o frekvencích).

Větší 'bohatost' vlnkové transformace vůči Fourierově transformaci není zadarmo.

Vlnky:

- Nejsou spojité, tj. všude diferencovatelné.
- Ztrácejí spektrální přesnost při výpočtu derivací.
- Ztrácejí některé užitečné matematické vlastnosti Fourierovy transformace, např. větu o konvoluci.

Dyadická (oktávová) mřížka pro měřítko a posun (1)

- Spojitá změna měřítka signálu a jeho posun by vedly k příliš nadbytečné reprezentaci signálu (obrazu).
- Je výhodnější měnit parametry měřítko a posuv v diskrétních krocích.
- Jde o nutný krok směrem diskrétní vlnkové transformaci (angl. discrete wavelet transformation, DWT).

Dyadická (oktávová) mřížka pro měřítko a posun (2)

- Je výhodné používat zvláštní hodnoty pro posun τ a měřítko s při vzniku generujících (bázových) vlnek, tj. při zavedení diskrétního kroku j a kroku posunu k: $s = 2^{-j}$ and $\tau = k \cdot 2^{-j}$; $j = 1, \ldots$; $k = 1, \ldots$;

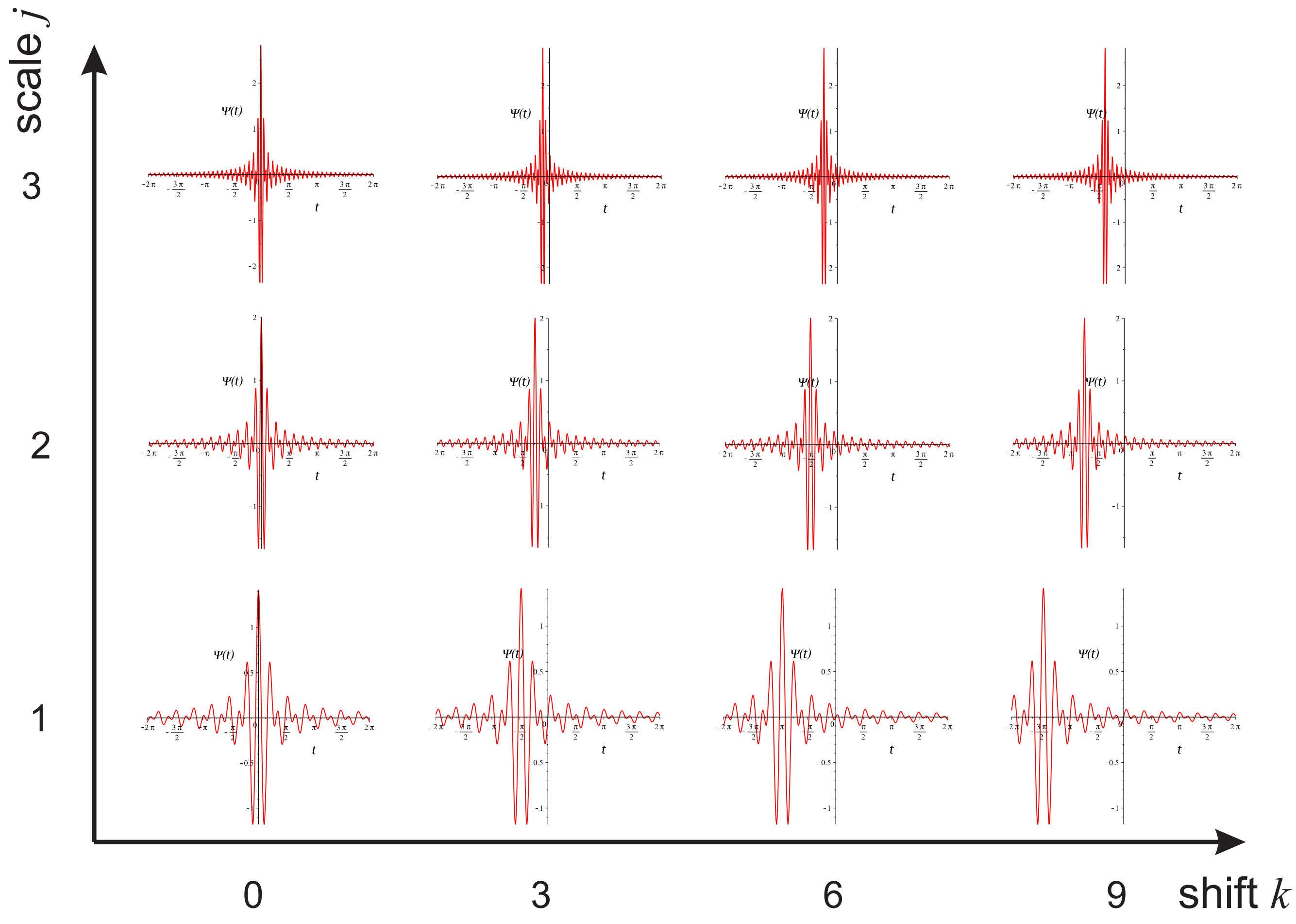
$$\Psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) = \frac{1}{\sqrt{2^{-j}}} \Psi\left(\frac{t - k\,2^{-j}}{2^{-j}}\right) = 2^{\frac{j}{2}} \Psi\left(2^j\,t - k\right) .$$

$$\Psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \Psi\left(2^j\,t - k\right) .$$

- Příklad pro Shannovu vlnku z průsvitky 8:

$$\Psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \frac{(\sin(2\pi(2^j\,t + k)) - \sin(\pi\,2^j\,t + k))}{\pi\,(2^j\,t + k)} .$$

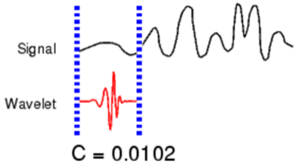
Příklad: Shannonova vlnka, více měřítek, posunů



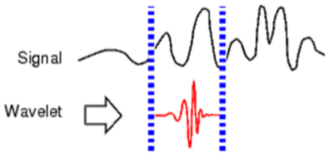
Výpočet diskrétní vlnkové transformace (DWT)

1. Začíná se nejjemnějším měřítkem a nulovým posunem.
2. Vlnka se umístí na začátek signálu, vypočte se skalární součin mezi částí signálu a vlnkou a integruje se podle času. Výsledkem je jedna hodnota $c(j,k)$ udávající 'lokální podobnost' části signálu s vlnkou.
3. Vlnka se posune vpravo a krok 2 se opakuje do konce signálu.
4. Použije se o krok hrubší měřítko a kroky 2 až 3 se opakují až do vyčerpání všech měřítek.

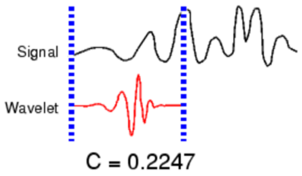
Výstupem je matice koeficientů c pro všechna měřítka a posuny, tzv. spektrogram.



Nejjemnější měřítko, posun 0



Jeden posun, nejjemněj. měř.



Opakování, hrubší měřítka

Vlastnosti vlnek z uživatelského pohledu (1)

Současná lokalizace v čase i ve 'frekvenčním' spektrogramu.

- Lokalizace vlnky dovoluje reprezentovat umístění vlnky jak v čase, tak i ve 'frekvenčním' spektrogramu'(při uvědomění si teoretického limitu daného principem nejistoty Wernera Heisenberga).
- Tvar vlnky dovoluje vyjádřit různé části signálu a různá rozlišení.

Řídkost reprezentace – pro praktické signály: mnoho koeficientů vlnkové transformace $c(j, k)$ ve vlnkové reprezentaci má buď hodnotu nulovou nebo velmi malou.

Lineární časová výpočetní složitost – výpočet může být pro mnohé 1D vlnky realizován v čase $\mathcal{O}(\mathcal{N})$ time.

Vlastnosti vlnek z uživatelského pohledu (2)

Přizpůsobivost – vlnky se mohou přizpůsobit velmi rozmanitým signálům, např. funkcím s nespojitostmi, funkcím definovaným na omezeném definičním oboru.

- Hodí se např. pro úlohy a uzavřenými i otevřenými křivkami, s obrázky a pro velmi různé povrchy při 3D reprezentaci.
- Vlnky dovolují poměrně úsporně a úspěšně reprezentovat funkce s nespojitostmi nebo rohy (v obrázcích). Připomeňme si, že některé vlnky mají samy nespojitosti (a ostré rohy ve 2D případě).

Diskrétní vlnková transformace (DWT)

- DWT používá diadickou (oktávovou) mřížku pro parametr měřítka j a posunu k, které byly zavedeny v průsvitce 16.
- Přímá DWT:

$$c(j,k) = \sum_t f(t)\, \Psi^*_{j,k}(t)\ , \text{ where } \Psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}}\, \Psi\left(2^j\, t - k\right)\ .$$

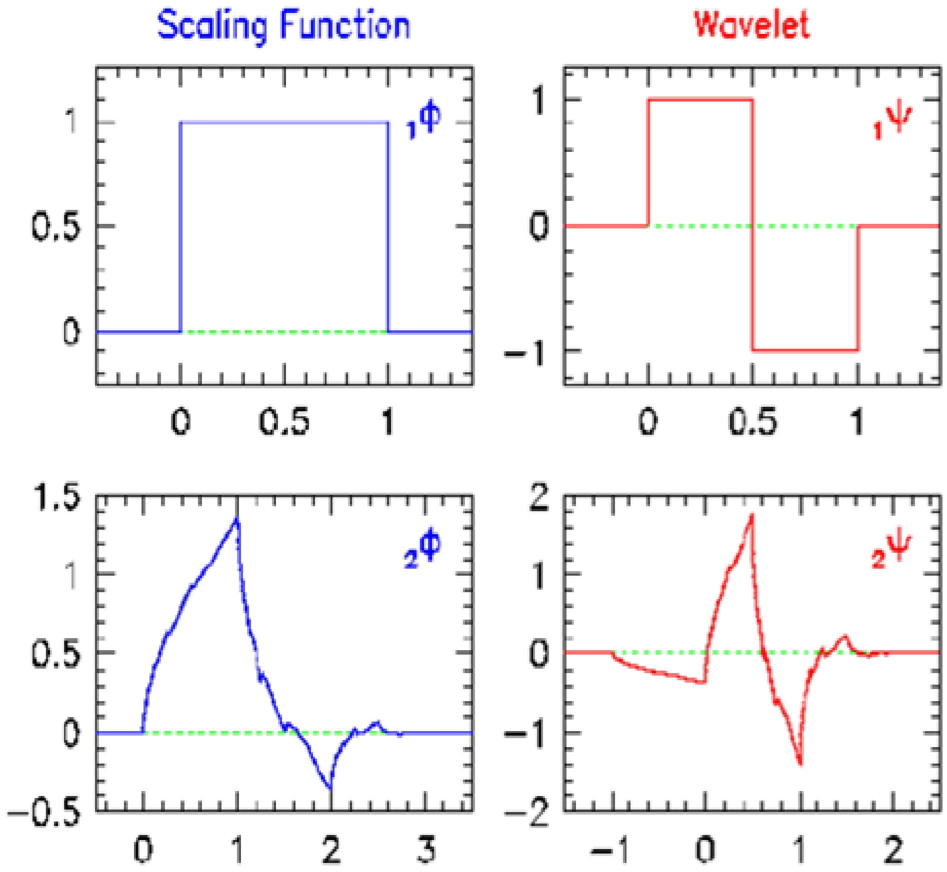
byla zavedena v průsvitece 16.

- Inverzní DWT:

$$f(t) = \sum_k \sum_j c(j,k)\, \Psi_{j,k}(t)\ .$$

Vlnky podle A. Haar a I. Daubechies; Ukázka průběhů

- Vlnka Haar
- Vlnka Daubechies



Vlastnosti vlnek Ingrid Daubechies

Ingrid Daubechies, Communications Pure Applied Math. 41 (1988), 909-996.

- Kompaktní definiční obor.
  - Konečný počet parametrů filtru / rychlá implementace.
  - Dosahuje se vysoké míry komprese.
  - Amplituda je velmi malá pro jemná měřítka v oblastech, v nichž je aproximovaná funkce hladká / citlivé pro rozpoznávání objektů daných ‘strukturou’.
- Stejné parametry filtrů pro přímou i zpětnou transformaci.
  - Rychlá, přesná rekonstrukce.
  - Velmi asymetrické.

Mallatův filtrační postup
Rychlá vlnková tranformace

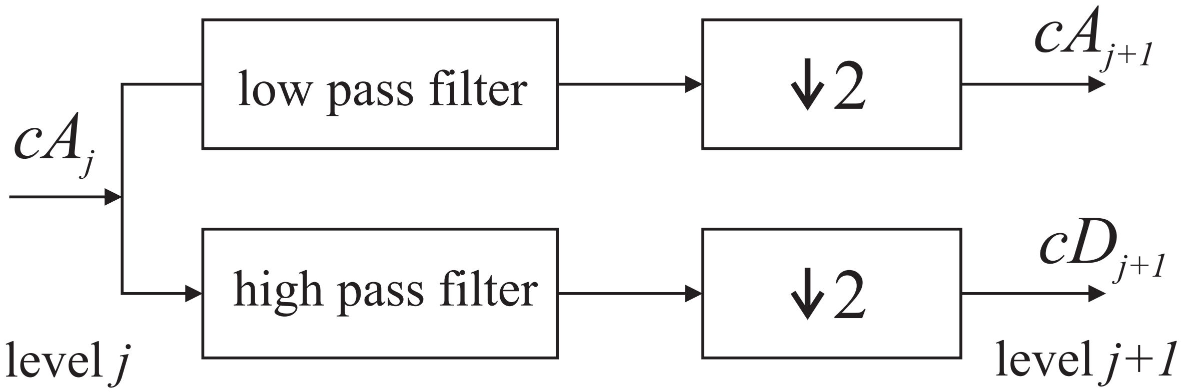
- Stephane G. Mallat: A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 11, No. 7, July 1989, pp. 674-693.
- S.G. Mallat byl prvním, kdo implementoval vlnkovou transformaci na diadické mřížce, a to známou metodou dvojkanálového kodéru díčími pásmy (angl. two channel sub band coder).
- Tím byla získána 'Rychlá vlnková transformace'.

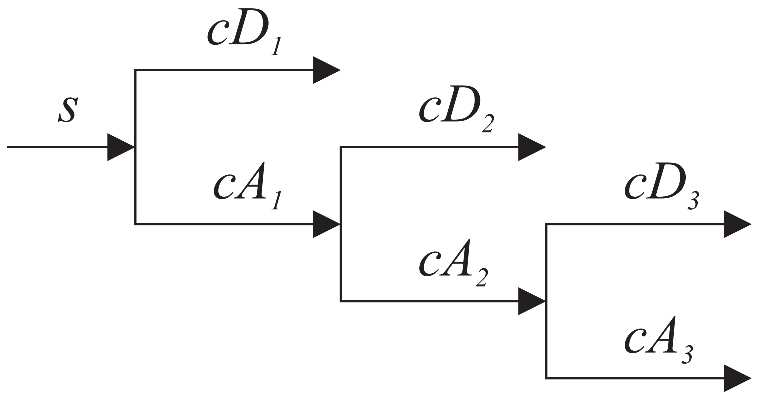
Rychlá vlknová transformace

- Uvažujme diskrétní 1D signál daný posloupností s délky N, který se má reprezentovat koeficienty vlnkové transformace c.
- Rychlá vlnková transformace vykoná nejvýše $\log_2 N$ kroků.
- První krok rozkladu vezme vstupní signál a poskytne dvě množiny koeficientů na úrovni 1, a to aproximační koeficienty cA_1 a detailní koeficienty cD_1.
- Udělá se konvoluce posloupnosti s s dolnopropustným filtrem pro aproximaci a hornopropustným fitrem pro detail.
- Následuje dynamické dělení, které podvzorkovává poslopnost, přičemž ponechává jen její sudé prvky. Toto podvzorkování budeme ve vývojových diagramech značit pomocí $\downarrow 2$.

Rychlá vlnková transformace, banka filtrů

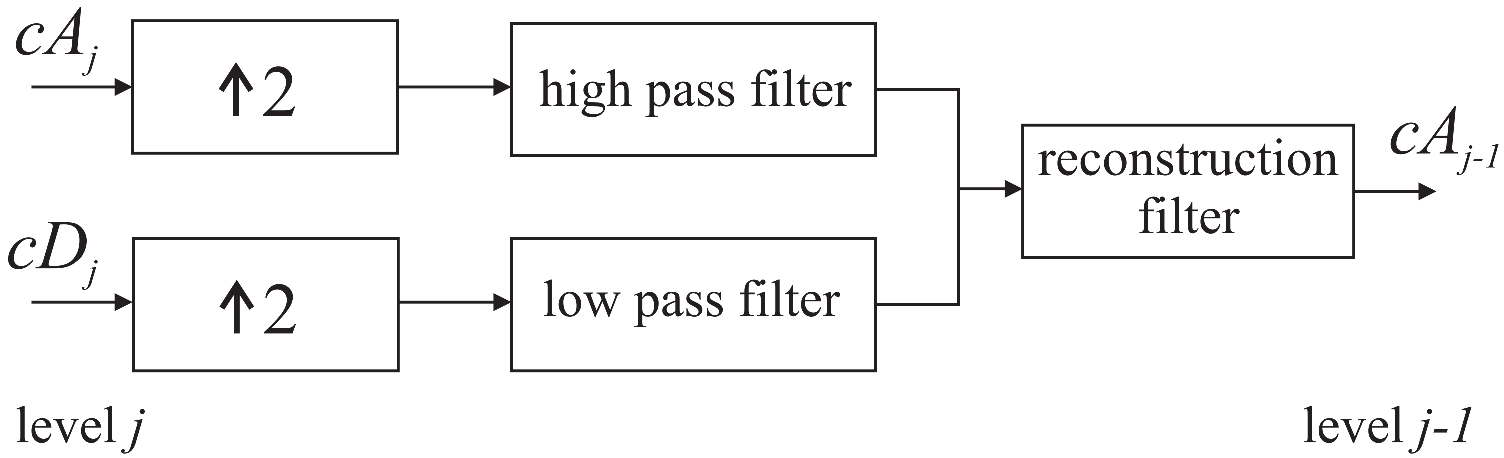
- Koeficienty úrovně $j+1$ se vypočítají z koeficientů úrovně j, což ukazuje obrázek vlevo dole.
- Tento postup se rekurzivně opakuje, aby se získaly detailní koeficienty na nižších úrovních. Postup vytvoří stromovou strukturu filtrů, které se říká banka filtrů.
- Strukturu koeficientů pro úroveň $j=3$ přibližuje obrázek vpravo dole.





Rychlá inverzní vlnková tranformace

- Rychlá inverzní vlnková transformace má na vstupu aproximační koeficienty cA_j a detailní koeficienty cD_j. Postup použitý při rozkladu je invertován.
- Posloupnosti se prodlužují ze vzorků (angl. up sampling) na dvojitou délku vložením nul do prvků s lichými indexy. Výsledek se podrobí konvoluci s rekonstrukčními filtry. Analogicky k podzorkování se prodlužování posloupností ve vývojových diagramech označuje pomocí $\uparrow 2$.



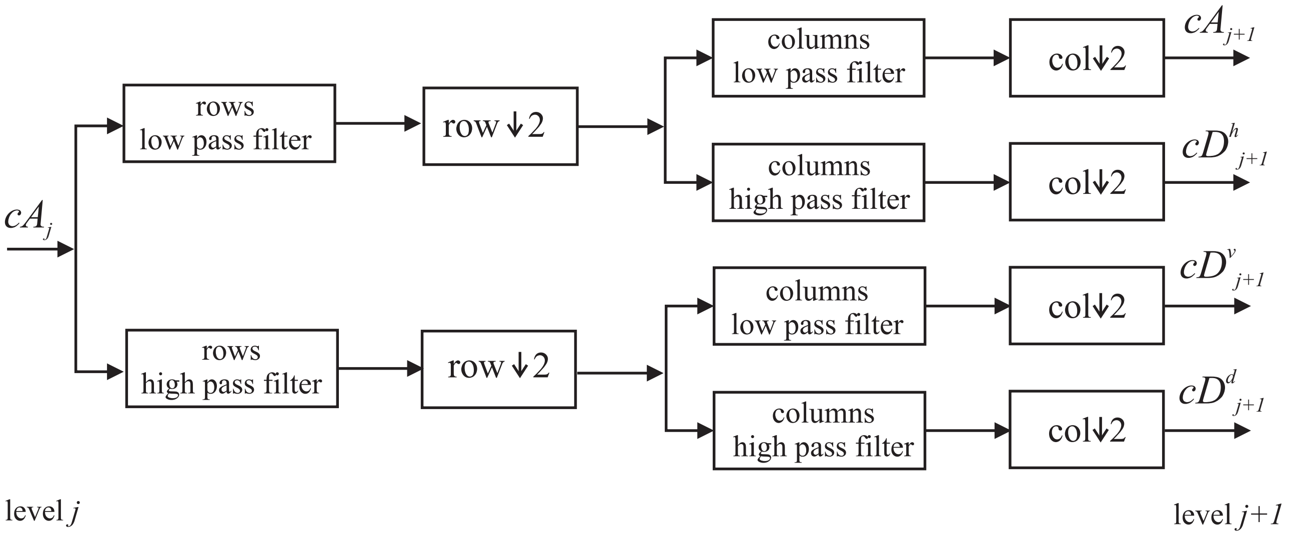
Zobecnění vlnkové transformace do 2D

Podobná vlnková dekompozice a rekonstrukce byly vyvinuty pro 2D signály (obrazy). 2D diskrétní vlnková transformace rozkládá jeden aproximační koeficient na úrovni j do čtyř složek v úrovni $j+1$:

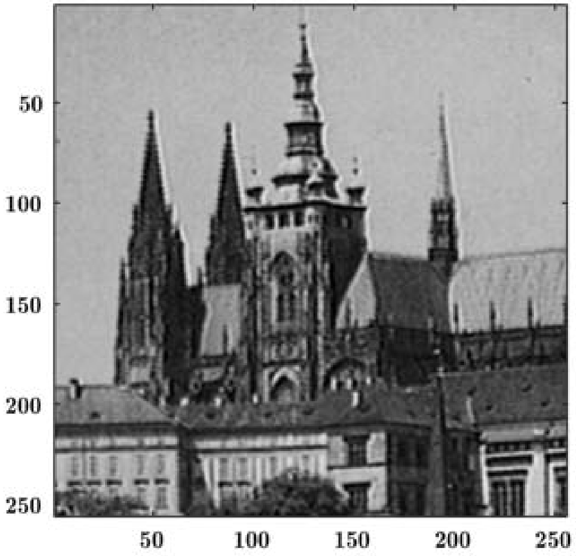
1. aproximační koeficient cA_{j+1} a detailnější koeficienty ve třech orientacích:
2. vodorovné cD^h_{j+1} ,
3. svislé cD^v_{j+1} ,
4. a úhlopříčné cD^d_{j+1} .

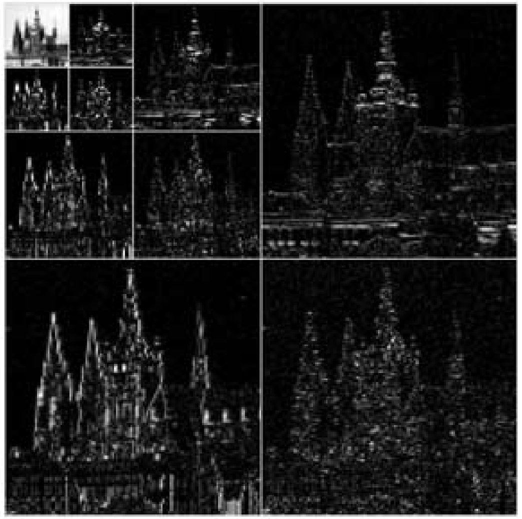
Symbol $(\mathrm{col} \downarrow 2)$ značí podvzorkování sloupců, přičemž se uchovávají jen sloupce se sudými indexy. Podobně $(\mathrm{row} \downarrow 2)$ znamená podvzorkování řádků, přičemž se uchovávají pouze řádky se sudými indexy. $(\mathrm{col} \uparrow 2)$ značí zjemnění sloupců doplněním nul do sloupců s lichými indexy. Podobně $(\mathrm{row} \uparrow 2)$ značí zjemnění řádek vložením nul do řádků s lichými indexy.

2D diskrétní vlnková transformace; Dekompoziční krok



Příklad, 2D vlnková dekompozice

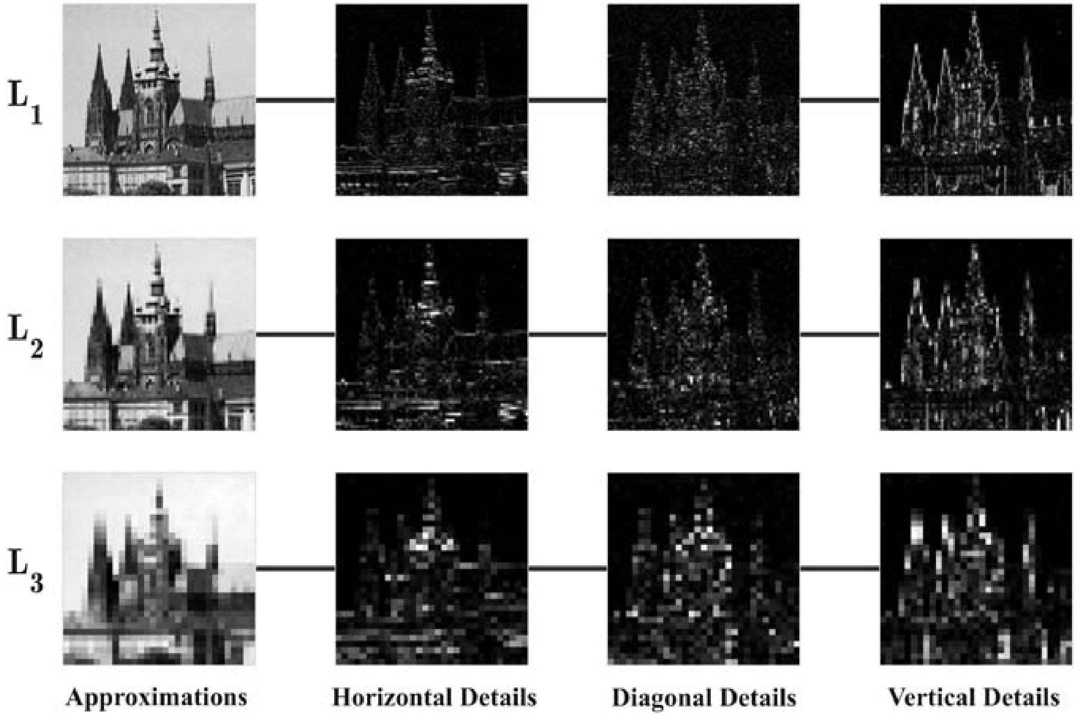




Decomposition at level 3

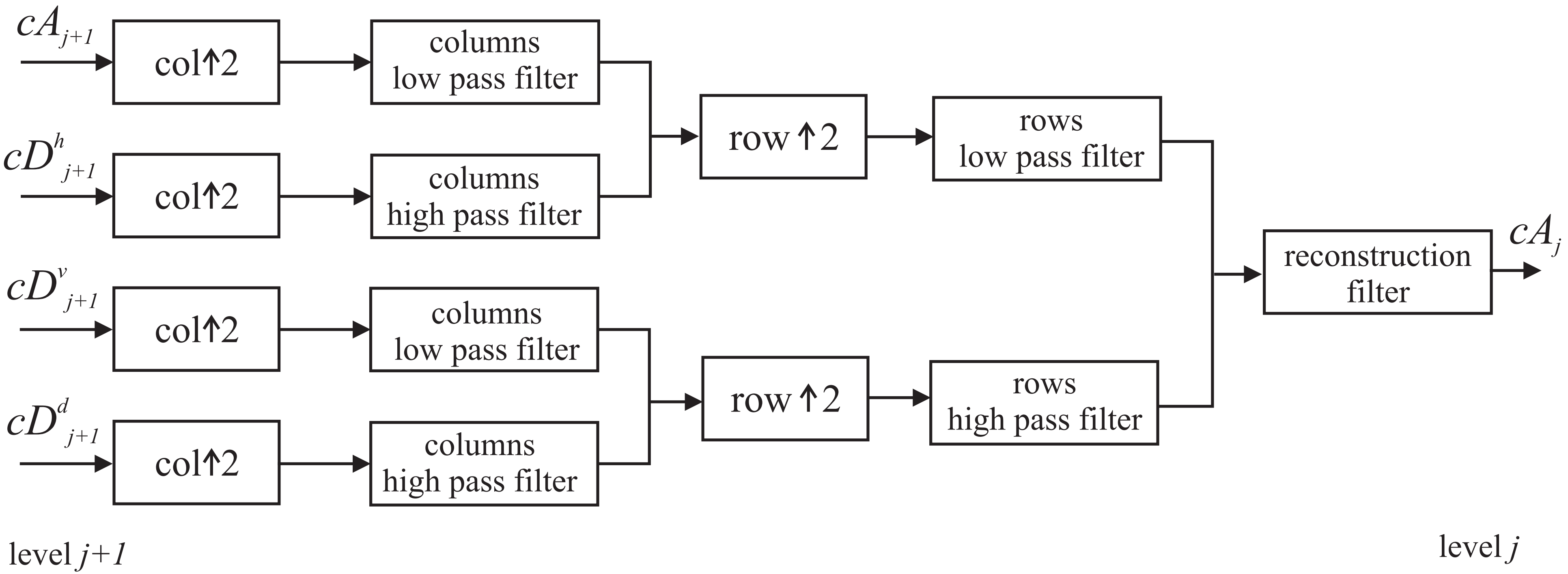
Obrázek na pravé straně se čtyřmi kvadranty. Nerozdělené jihozápadní, jihovýchodní a severovýchodní kvadranty odpovídají detailním koeficientům úrovně 1 v rozlišení 128×128 ve svislém, úhlopříčném i vodorovném směru. Severozápadní rozdělený kvadrant reprezentuje stejnou strukturu pro úroveň 2 v rozlišení 64×64. Severozápadní kvadrant na úrovni 2 ukazuje podobnou strukturu, ale na úrovni 3 v rozlišení 32×32. Jasnější čtverec v levém horním rohu odpovídá aproximačním koeficientům v úrovni 3.

Příklad, 2D vlnková dekompozice, jiný pohled



Jiný pohled na stejná data jako v předchozí průsvitce. Pohled ukazuje úroveň rozkladu na různých rozlišovacích úrovních.

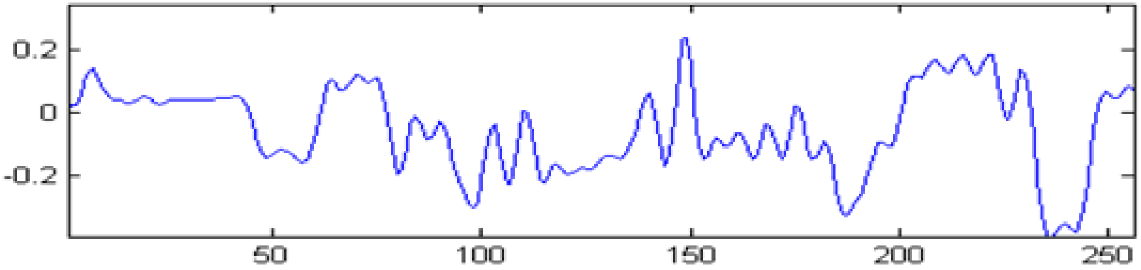
2D inverzní diskrétní vlnková tranformace Rekonstrukční krok.



Ukázka použití banky filtrů

Koeficienty nižší úrovně se dají spočítat z koeficientů vyšší úrovně pomocí algoritmu využívajícího stromovou strukturu, banku filtrů.

$$f_1(t) = \sum_k \sum_j c(1,k)\ \Psi_{1,k}(t)$$



$$f_0(t) = \sum_k \sum_j c(0,k)\ \Psi_{0,k}(t)$$