Mechanika

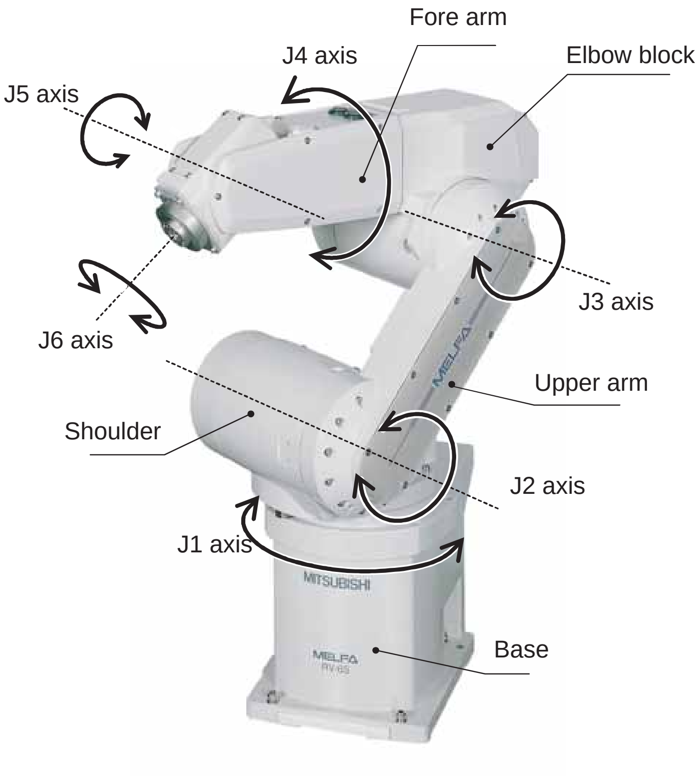
Kinematika studuje geometrii pohybu robotu a trajektorie, po kterých se pohybují jednotlivé body. Klíčový pojem je poloha.

Statika studuje vliv sil působících na robota v klidu a jejich vliv na jeho deformace. Klíčový pojem je pružnost.

Dynamika analyzuje vliv sil a momentů na robota za pohybu.

Použité pojmy a zákony mohou být použity na jakékoliv mechanické stroje.

Kinematika – Terminologie



Rameno (link) je pevná část robotu.

Kloub (joint) je část robotu, která umožňuje řízený nebo volný pohyb dvou ramen, které spojuje.

Chapadlo (end effector) je část manipulátoru, sloužící k uchopování nebo namontování dalších nástrojů (svařovací hlavice, stříkací hlavice,...).

Základna (rám, base) je část manipulátoru, která je pevně spojena se zemí.

Kinematická dvojice (kinematic pair) je dvojice ramen spojených kloubem.

Kloub může být řízený nebo volně pohyblivý. Řízený kloub má namontován pohon a řídicí systém může měnit jeho polohu. Poloha volně pohyblivého kloubu není řízena pohonem a závisí na poloze ostatních kloubů.

Kinematika – Terminologie II

Kinematický řetězec je množina ramen spojených klouby. Kinematický řetězec může být reprezentován grafem. Uzly grafu představují ramena a hrany predstavují klouby.

Mechanismus je kinematický řetězec, jehož jedno rameno je připevněno k zemi.

Otevřený kinematický řet. je řetězec, který může být popsán acyklickým grafem.

Smíšený kinematický řet., graf obsahuje smyčku.

Paralelní manipulátor obsahuje ekvivalentní smyčky.

Počet stupňů volnosti (intuitivní definice) je minimální počet nezávislých parametrů, které jednoznačně systém popisují.

Příklady:

Bod v prostoru má 3 DOF.

Bod v rovině má 2 DOF.

Tuhé těleso v rovině má 3 DOF.

Tuhé těleso v prostoru má 6 DOF.

Kinematika – Počet stupňů volnosti

Počet stupňů volnosti je důležitý pojem nejen v robotice. Zde je několik souvisejících definic:

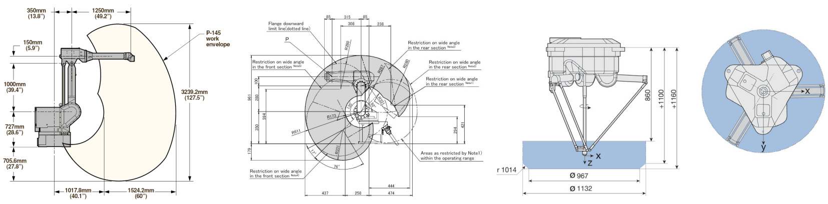
Okolní prostor – prostor, ve kterém robot nebo mechanismus pracuje, obvykle E^2 (rovina, planární manipulátor) nebo E^3 (prostor). Je to Euklidovský prostor (nebo jeho aproximace).

Operační prostor

je podprostor okolního prostoru, do kterého může při pohybu robot zasáhnout některou ze svých částí.

Pracovní obálka (pracovní prostor 3-D)

je podprostor okolního prostoru, kde kam robot může sahnout referenčním bodem chapadla.



Operační prostor musí být ohrazen bezpečnostním plotem, bezpečnostními dveřmi, optickou závorou a podobně.

Řezy *pracovní obálkou* jsou obvykle součástí dokumentace robotu. V praxi pracovní obálka jen nastiňuje dosah robota, protože na své hranici zpravidla zahrnuje jen jedinou orientaci manipulovaného předmětu.

Kinematika – Počet stupňů volnosti

Obvykle studujeme možné polohy manipulovaného objektu nebo nástroje.
Předpokládejme, že manipulovaný objekt je tuhé těleso

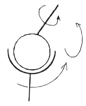
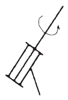
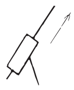
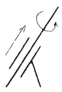
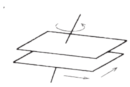
Poloha tuhého tělesa ve třírozměrném okolním prostoru může být popsána šesti parametry. Význam těchto parametrů závisí na zvolené parametrizaci, např. souřadnice zvoleného bodu (3 parametry) a orientace určená třemi úhly.

Prostor všech poloh je šestirozměrný prostor reprezentující všechny možné polohy tuhého tělesa.

Poloha chapadla může být studována v prostoru všech poloh.

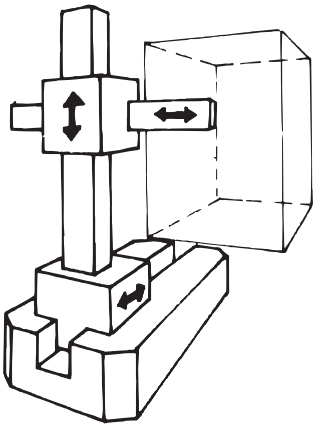
Pracovní prostor je podprostor prostoru všech poloh obsahující všechny polohy, které může chapadlo zaujmout. Řešitelnost konkrétní úlohy musíme posuzovat v tomto šestirozměrném pracovním prostoru.

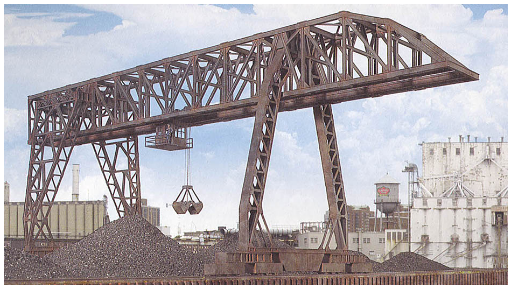
Druhy kinematických dvojic

Symbol	Název	má/odnímá DOF
	sférická	3 / 3
	rotační	1 / 5
	posuvná	1 / 5
	válcová	2 / 4
	plochá	3 / 3

V praxi je dávána přednost rotačnímu kloubu, protože jeho realizace je levná, má malé tření a vysokou tuhost. V následujícím výkladu budeme studovat především rotační a posuvné klouby.

Typická struktura manipulátoru – Pravoúhlá (kartézská) – PPP





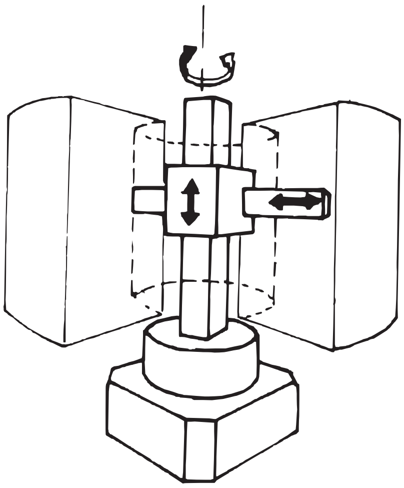
Tuhé těleso v prostoru má 6 stupňů volnosti. Manipulátor, který má umožnit alespoň v omezeném prostoru libovolnou polohu a orientaci tělesa, musí mít nejméně 6 stupňů volnosti. Protože každý další stupeň volnosti manipulátor prodražuje a snižuje jeho tuhost, mají obecné manipulátory právě 6 stupňů volnosti.

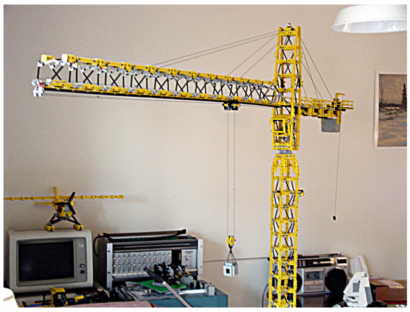
Klouby, které mají být řízeny a odměřovány, mají většinou právě jeden stupeň volnosti, protože sestrojit řízený kloub se dvěma stupni volnosti je technicky obtížné, rozuměj drahé. Nejčastěji jsou používány posuvný a rotační (otočný) kloub. Pokud má být kooub volný, není problém sestrojit kloub sférický, válcový a podobně.

Manipulátory s otevřeným kinematickým řetězcem (sériové) mají samozřejmě všechny klouby řízené a odměřované (proč?).

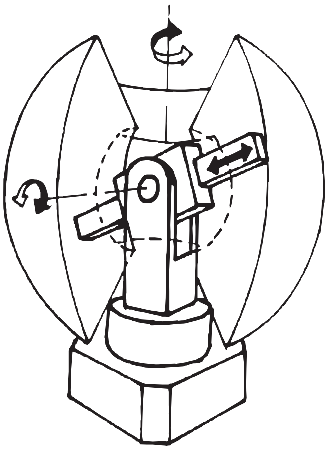
Sériové manipulátory se šesti stupni volnosti, které obsahují jen posuvné a otočné klouby a které mají zajistit obecnou orientaci manipulovaného tělesa, musí mít alespoň 3 klouby otočné. Vysvětlete proč není možné libovolným počtem jen posuvných kloubů otočit tělesem. Většinou první tři klouby (počítáno od rámu) mají velký rozsah pohybu a určují tak tvar a vlastnosti pracovní obálky robotu, poslední tři klouby, nejčastěji otočné, zajišťují orientaci tělesa. Toto nám dává příležitost klasifikovat roboty podle prvních třech kloubů (os) do jednotlivých struktur. Výše uvedený seznam struktur není úplný ani z matematického hlediska ani z hlediska reálných robotů, ale většina robotů má jednu z uvedených struktur. Pořadí kloubů je uvedeno písmeny, např. RPP je rotočníposuvný-posuvný, tedy válcový manipulátor.

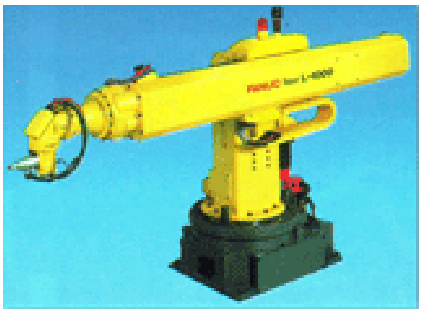
Typická struktura manipulátoru – Válcová (cylindrická) – RPP

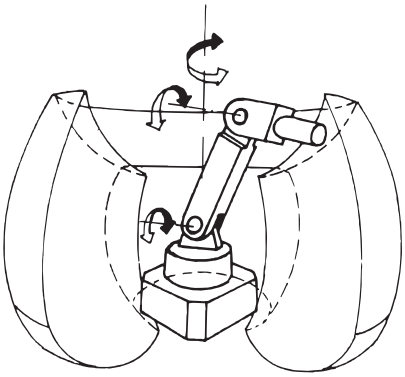




Typická struktura manipulátoru – Sférická – RRP

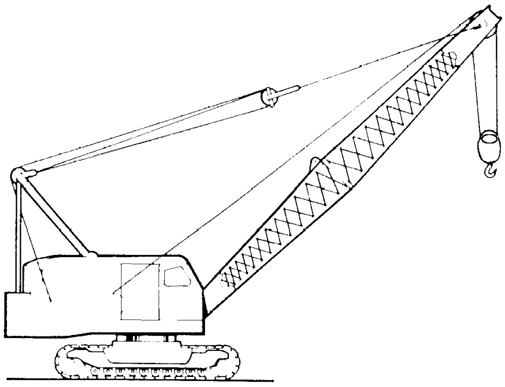


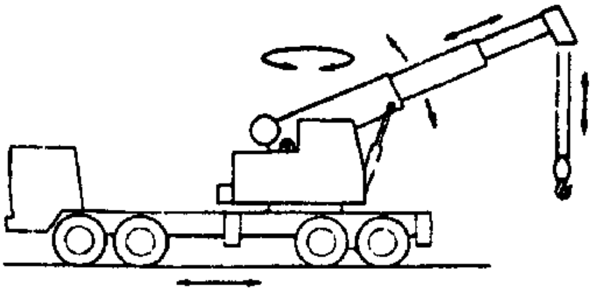




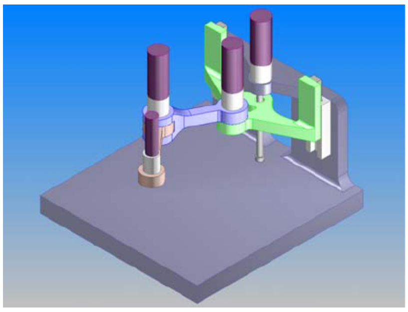
Angulární roboty mají dobrý poměr mezi objemem pracovní obálky a rozměry robotu.

Typická struktura manipulátoru – jeřáby RRP a RRPP





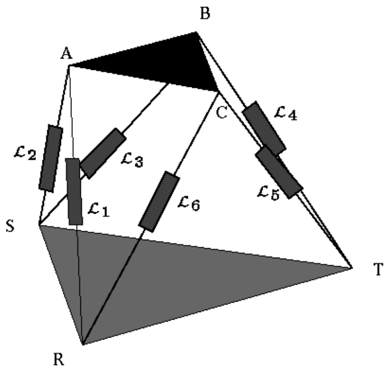
Typická struktura manipulátoru – SCARA – RRRP

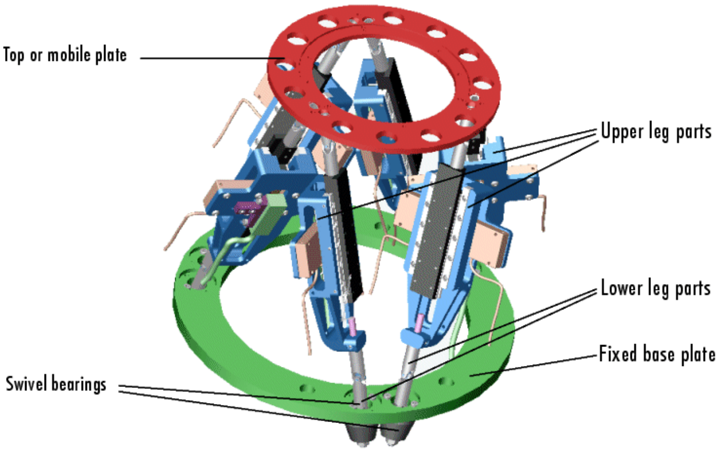


Animace převzaty z webu Masuda Salimianiho

Robot SCARA je zvláště vhodný pro operace nad rovinou, ve které má značný rozsah, a je zpravidla velmi rychlý, protože tři otočné osy nepracují proti gravitaci.

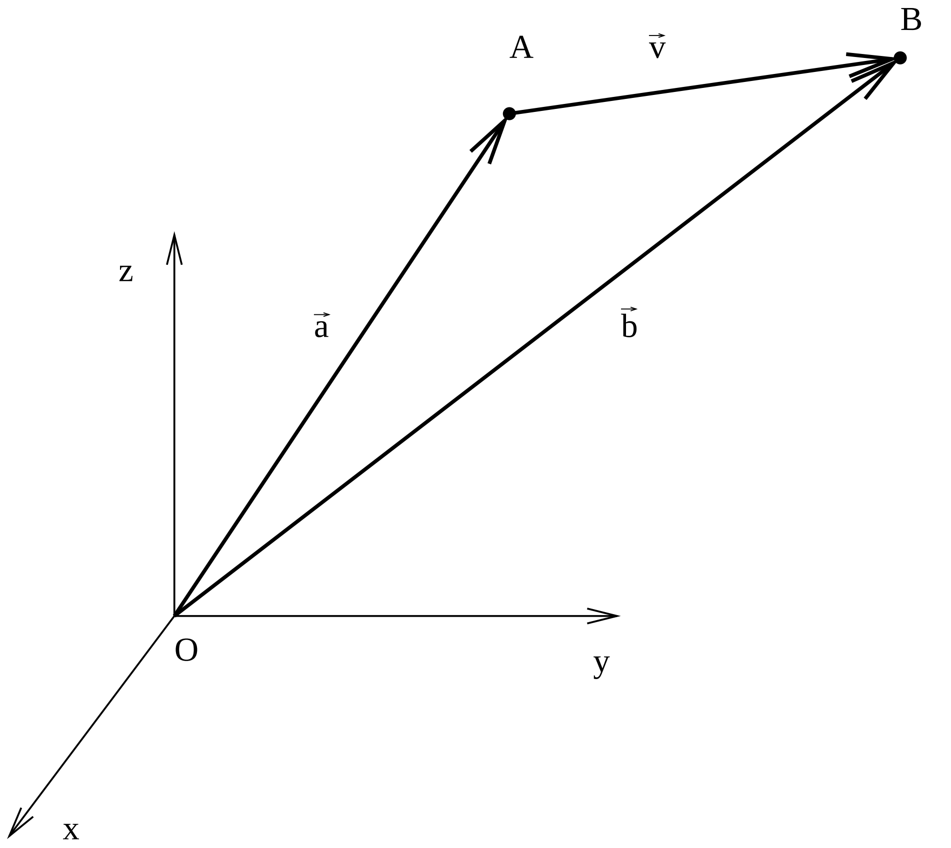
Typická struktura manipulátoru – Stewartova plošina





Body, vektory, geometrie, algebra

m p
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36



Body a vektory v geometrii a algebře

Pojem *bod* v geometrii považuji za dostatečně známý a protože jeho definice není matematicky snadná, nebudu ho definovat. Jen chci připomenout, že je dobré ho vnímat jako "místo v prostoru", které existuje nezávisle na nějakých číslech.

Pojem *vektor* v geometrii můžeme definovat jako uspořádanou dvojici bodů, počáteční a koncový bod. Značíme $\vec{AB}$.

V geometrii pak můžeme používat obraty jako "bod A je průsečíkem kružnice k se středem v bodě B, procházející bodem C a přímky procházející body D a E".

Naše problémy v robotice jsou svou podstatou geometrické problémy (přinejmenším v kinematice). Velmi často potřebujeme reprezentovat geometrii v počítači, který ale s geometrickými pojmy přímo pracovat neumí.

Matematická teorie lineárních prostorů nám umožňuje pracovat s matematickými objekty typu uspořádaná n-tice čísel. Lze ukázat, že pro geometrické a lineární prostory konečné dimenze existuje vzájemně jednoznačné zobrazení (isomorfismus) mezi geometrickými a algebraickými objekty. Abychom mohli zavést tento isomorfismus, musíme v geometrii zavést souřadnou soustavu[1]. Geometrický bod v prostoru pak můžeme ztotožnit s uspořádanou trojicí (vektorem, zde algebraický pojem) reálných čísel, kde uvedená čísla popisují souřadnice geometrického bodu v dané souřadné soustavě. Takovému vektoru v geometrii říkáme polohový vektor bodu, jeho počáteční bod je počátek souřadného systému, jeho koncový bod je pak reprezentovaný geometrický bod.

Lineární prostor tak tvoří univerzální model geometrického prostoru a jeho pomocí můžeme reprezentovat všechny vlastnosti geometrického prostoru a naopak.

To, že geometrické pojmy můžeme považovat za základní, ospravedlňuje například to, že geometrie byla matematiky úspěšně pěstována přibližně 2000 let bez potřeby zavádění souřadnic. To, že existuje isomorfismus, ale zároveň ukazuje, že oba popisy jsou v principu ekvivalentní a můžeme libovolně přecházet z jednoho do druhého. Mezi body a vektory v geometrii můžeme zavést řadu operací:

- dva body definují vektor $\vec{v} = \vec{AB}$,
- bod a vektor definují bod $A + \vec{v} = B$
- vektory lze sčítat a odčítat $\vec{b} = \vec{a} + \vec{v}$

Tyto operace platí bez zavedení souřadného systému.

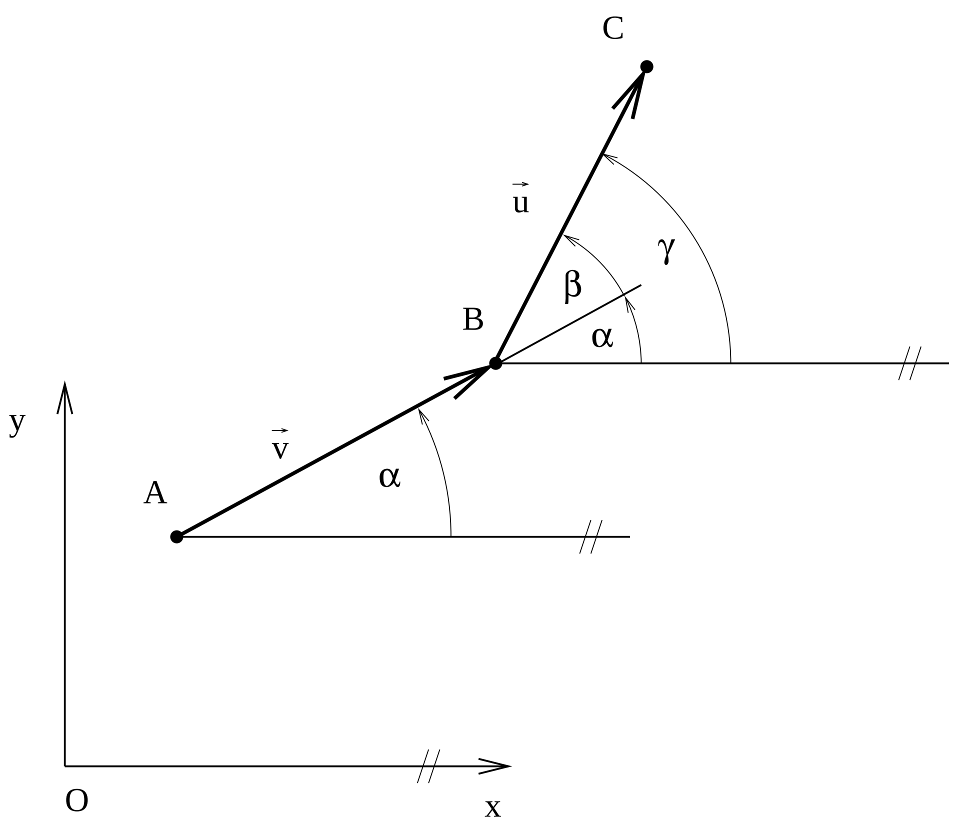
Stejné operace můžeme zavést v algebře mezi uspořádanými trojicemi (n-ticemi) reprezentující body a vektory. Zápis vzorců zůstává stejný, jen operátory znamenají něco jiného. Algebraické objekty v rovnicích správně reprezentují geometrické objekty, pokud jsou všechny vyjádřeny ve stejné souřadné soustavě. Na volbě souřadné soustavy přitom nezáleží. Formálně budou popisy geometrie algebraickými rovnicemi

[1] Česky správnější je souřadnicová soustava; souřadná soustava je ale také užívána

vždy stejné, číselně se liší v závislosti na volbě souřadné soustavy.

K situaci, kdy máme různé souřadné systémy, se dostaneme dále.

Technická poznámka



Běžný přístup[2] pro určení parametrů trojúhelníku je používat kosinovou nebo sinovou větu, Pythagorovu větu a podobně. Tyto věty a podobné vzorce, jako například součet úhlů v trojúhelníku, je v analytické geometrii obtížné používat. Problém je v tom, že nalezené řešení musíme interpretovat do příslušných kvadrantů, uměle vyrábět další řešení, či nalezená řešení testovat na splnění vstupních podmínek. To může být pracné a zdrojem řady chyb, které se mohou projevit až při provozu zařízení.

Níže uvádím některá doporučení, jak se chybám vyhnout:

- Snažte se počítat souřadnice rohů trojúhelníků místo délek stran či velikostí úhlů v trojúhelníku.
- Používejte pro určení úhlů vzorec $\phi = \mathrm{atan2}(y, x)$ vždy, když je to možné. Vyhýbejte se použití funkce arccos a podobně.
- Když počítáte úhly a souřadnice, značte je do obrázků a interpretujte je vždy orientovaně. Takto spočítané úhly a souřadnice mohou být pak snadno sčítány a odčítány bez nutnosti analýzy příslušné situace.
- Pokud pracujete s analytickým tvarem přímky, používejte tvar $ax + by + c = 0$, který na rozdíl od směrnicového tvaru $y = kx + q$ bezchybně pracuje ve všech kvadrantech.

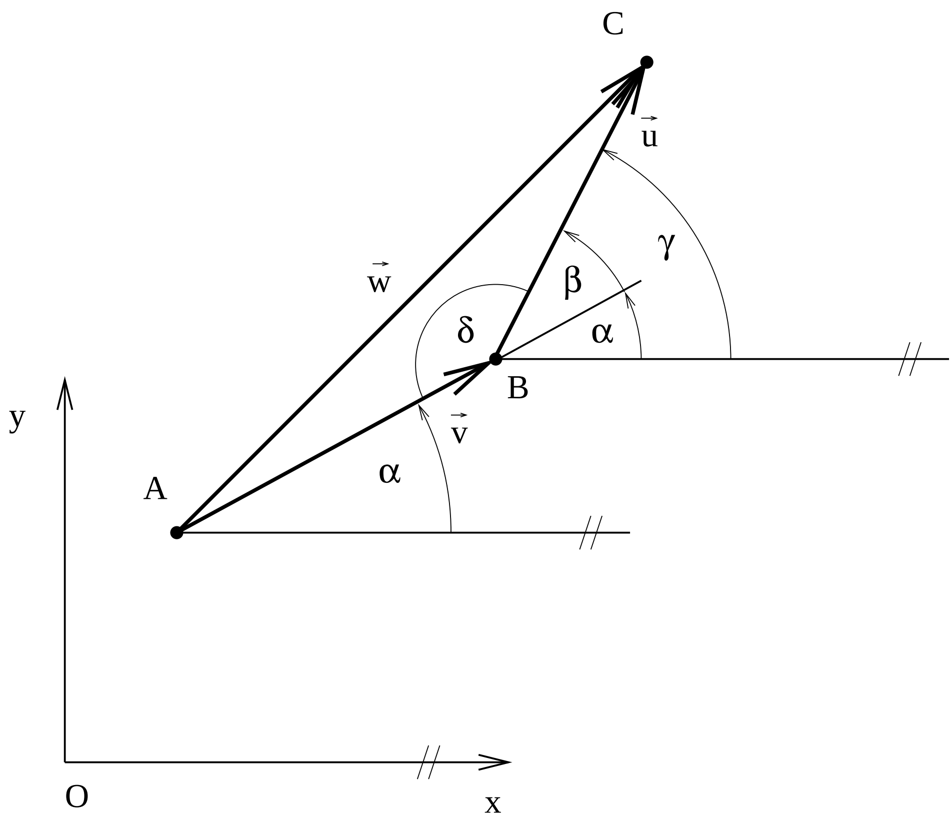
Výpočet úhlu mezi osou x a vektorem $\vec{AB}$ vyznačeným na obrázku. Orientovaný, čtyřkvadrantový úhel α lze spočítat $\alpha = \mathrm{atan2}(B_y - A_y, B_x - A_x)$.

Nejrychlejší a nejbezpečnější cesta, jak spočítat úhel β mezi vektory $\vec{v}$ a $\vec{u}$ je následující:

$$\alpha = \mathrm{atan2}(B_y - A_y, B_x - A_x), \quad (1)$$
$$\gamma = \mathrm{atan2}(C_y - B_y, C_x - B_x), \quad (2)$$
$$\beta = \gamma - \alpha. \quad (3)$$

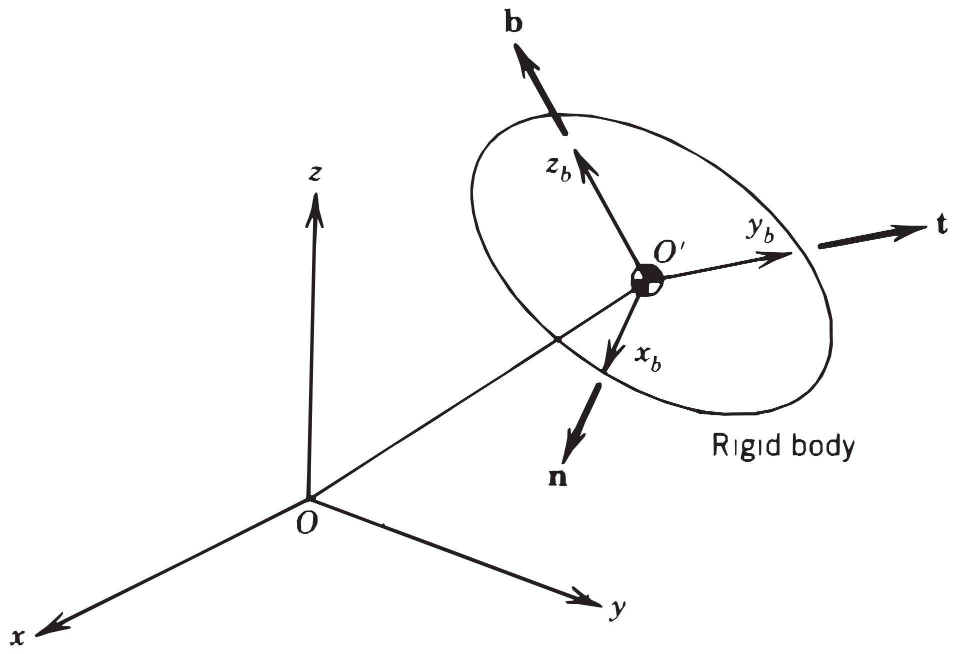
[2] Srovnej běžný prací prášek.

Technická poznámka II



Nechť máme dány souřadnice bodů A a C a délky vektorů $\vec{v}$ a $\vec{u}$. Nejbezpečnější cesta, jak určit souřadnice bodu B a příslušné úhly je místo použití kosinové věty a boje s úhlem δ nalézt bod B jako průsečík dvou kružnic se středy v bodech A a C a příslušnými poloměry. Tím dostaneme pro bod B dvě řešení. Úhly pak spočítáme pomocí výše uvedených rovnic.

Těleso v souřadném systému



Těleso v rovině má 3 DOF.
Těleso v prostoru má 6 DOF.
Kontrolní otázky:
Kolik stupňů volnosti má skládací metr na stole?
Kolik stupňů volnosti má gumička?

Tuhé těleso – v našem výkladu uvažujeme jen tuhá tělesa. S tuhým tělesem můžeme svázat souřadný systém a polohu jednotlivých bodů tělesa v tomto souřadném systému pak známe, např. z výkresu předmětu, kterým manipulujeme.

Aktuální poloha tělesa v čase – lze ji popsat polohou souřadného systému s tělesem svázaným v jiném, nepohyblivém, "světovém" souřadném systému. Jak konkrétně popsat polohu tělesa bude ukázáno dále.

Pohyb tělesa v čase – můžeme popsat jako funkci aktuální polohy tělesa v závislosti na čase.

Vzájemná poloha dvou souřadných soustav lze vždy rozložit na posun a otočení.

Zvolíme souřadný systém rámu $O - xyz$. S tělesem svážeme souřadný systém $O' - x^b y^b z^b$. Popis souřadného systému $O' - x^b y^b z^b$ v souřadném systému rámu je:

$$\vec{OO'} = \mathbf{x}_o = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} (\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{b}) .$$

Utvořme matici $\mathbf{R} = (\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{b})$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{b}$ jsou jednotkové a ortogonální vektory, matice $\mathbf{R}$ je ortonormální, tedy $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$.

Popis polohy tělesa

Bod v 3D prostoru – popsán třemi souřadnicemi.

Tuhé těleso v 3D prostoru – popsáno šesti souřadnicemi:

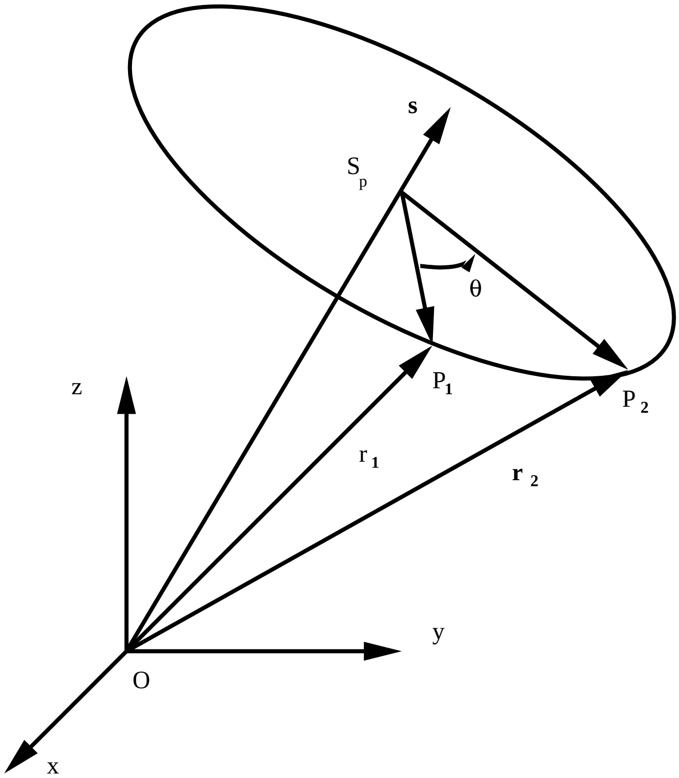
- 3 souřadnice referenčního bodu $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$,
- orientace může být popsána jedním ze způsobů:
  - souřadnicemi vektorů spojených s tělesem $(\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{b})$,
  - Eulerovými úhly (ϕ, θ, ψ),
  - rotační maticí $\mathbf{R}$,
  - osou – úhlem,
  - kvaternionem.

Souřadnice referenčního bodu a rotační matice mohou být kombinovány do transformační matice.

Pro rotační matici srovnej heslo Eric W. Weisstein. "Rotation Matrix." From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/RotationMatrix.html

Převodní vztahy jsou přehledně na stránce http://www.euclideanspace.com/maths/geometry /rotations/conversions/index.htm Je třeba dávat pozor na použité definice, aby se nesmíchali vzorce používající různou notaci.

Kvaterniony



Kvaterniony popisují rotaci pomocí polohy osy rotace (vektor $\mathbf{s}$) a úhlem otočení θ:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q} &= (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)\mathbf{s}) = \\
&= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)s_x, \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)s_y, \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)s_z\right)
\end{aligned}
$$

Kvaterniony jsou zajimavý matematický nástroj. Mezi jejich důležité vlastnosti patří

- všechny 4 souřadnice mají ekvivalentní postavení,
- $\mathbf{q}$ a $-\mathbf{q}$ popisují stejnou rotaci,
- v kvaternionech je relativně jednoduché interpolovat rotaci.

Úlohu interpolovat rotaci (např. pro manipulaci v robotice nebo pro vizualizaci v počítačové grafice) lze snadno řešit pomocí kvaternionů. Metoda se nazývá Spherical linear interpolation (SLERP). Interpolujeme z $\mathbf{q}_1$ do $\mathbf{q}_2$ a dostáváme $\mathbf{q}$, interpolační parameter je t, α reprezentuje celkový úhel, o který rotujeme (úhel mezi quaterniony je polovina tohoto úhlu, absolutní hodnota skalarního součinu nám garantuje kratší rotaci):

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1^{-1})^t \mathbf{q}_1 \,, \tag{4}$$

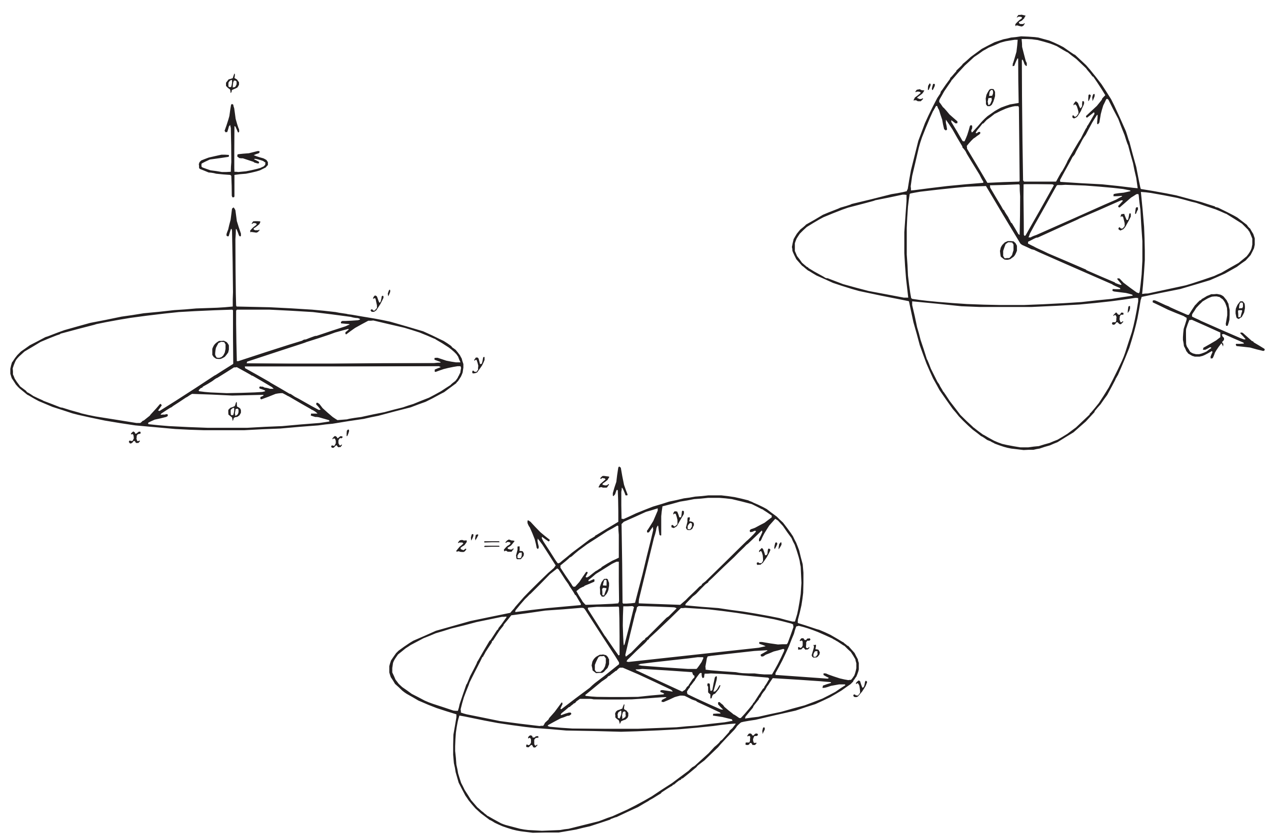
$$\mathbf{q} = \frac{\sin((1-t)\alpha)}{\sin(\alpha)}\mathbf{q}_1 + \frac{\sin(t\alpha)}{\sin(\alpha)}\mathbf{q}_2 \,, \tag{5}$$

$$\cos(\alpha/2) = \|\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2\| \,, \tag{6}$$

$$t \in \; < 0, 1 > \,. \tag{7}$$

Srovnej Eric W. Weisstein. "Quaternion." From MathWorld–A Wolfram Web Resource.
http://mathworld.wolfram.com/Quaternion.html

Definice Eulerových úhlů



Eulerovy úhly

Matice **R** má devět koeficientů, ale má hodnost pouze tři. Je tedy redundantní reprezentací, omezující podmínky jsou právě jednotkovost a kolmost vektorů **n**, **t**, **b**:

$$\mathbf{n}^T\mathbf{t} = 0 \quad \mathbf{t}^T\mathbf{b} = 0 \quad \mathbf{b}^T\mathbf{n} = 0$$
$$|\mathbf{n}| = 1 \quad |\mathbf{t}| = 1 \quad |\mathbf{b}| = 1$$

Matici **R** lze snadno zkonstruovat pomocí Eulerových úhlů

1. Otočme souřadný systém $O - xyz$ okolo osy z o úhel ϕ. Dostaneme $O - x'y'z$.
2. Otočme souřadný systém $O - x'y'z$ okolo osy x' o úhel θ. Dostaneme $O - x'y''z''$.
3. Otočme souřadný systém $O - x'y''z''$okolo osy z'' o úhel ψ. Dostaneme $O - x^b y^b z^b$.

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{R}_{x'}(\theta)\mathbf{R}_{z''}(\psi)$$

$$\mathbf{R}_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\mathbf{R}_{x'}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\mathbf{R}_{z''}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\psi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & -\cos\theta\cos\psi\sin\phi - \cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\theta \\ \cos\psi\sin\phi + \cos\phi\cos\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\theta\cos\psi - \sin\phi\sin\psi & -\cos\phi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & \cos\psi\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{11}$$

Trojice Eulerových úhlů dává jednoznačně otočení v prostoru, poloha v prostoru nedává jednoznačně trojici úhlů. Existují další podobné definice, které mají podobné vlastnosti, ale jiné rovnice. Jestliže je dána matice **R**, lze Eulerovy úhly vypočítat z porovnání prvků r_{33}, r_{32}, r_{23}.

Rotation Matrix Resulting from Euler Angles

Eulerovy úhly podle definice v těchto přednáškách (Asada, Slotine):

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cos}(\phi)\,\mathrm{Cos}(\psi) - \mathrm{Cos}(\Theta)\,\mathrm{Sin}(\phi)\,\mathrm{Sin}(\psi) & -\mathrm{Cos}(\Theta)\,\mathrm{Cos}(\psi)\,\mathrm{Sin}(\phi) - \mathrm{Cos}(\phi)\,\mathrm{Sin}(\psi) & \mathrm{Sin}(\phi)\,\mathrm{Sin}(\Theta) \\ \mathrm{Cos}(\psi)\,\mathrm{Sin}(\phi) + \mathrm{Cos}(\phi)\,\mathrm{Cos}(\Theta)\,\mathrm{Sin}(\psi) & \mathrm{Cos}(\phi)\,\mathrm{Cos}(\Theta)\,\mathrm{Cos}(\psi) - \mathrm{Sin}(\phi)\,\mathrm{Sin}(\psi) & -\mathrm{Cos}(\phi)\,\mathrm{Sin}(\Theta) \\ \mathrm{Sin}(\Theta)\,\mathrm{Sin}(\psi) & \mathrm{Cos}(\psi)\,\mathrm{Sin}(\Theta) & \mathrm{Cos}(\Theta) \end{pmatrix}$$

Rotační matice definována úhly Yaw, Pitch, Roll použitými například v robotu CRS, tedy rotujeme postupně okolo z, y, x':

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cos}(\alpha)\,\mathrm{Cos}(\beta) & -\mathrm{Cos}(\gamma)\,\mathrm{Sin}(\alpha) + \mathrm{Cos}(\alpha)\,\mathrm{Sin}(\beta)\,\mathrm{Sin}(\gamma) & \mathrm{Cos}(\alpha)\,\mathrm{Cos}(\gamma)\,\mathrm{Sin}(\beta) + \mathrm{Sin}(\alpha)\,\mathrm{Sin}(\gamma) \\ \mathrm{Cos}(\beta)\,\mathrm{Sin}(\alpha) & \mathrm{Cos}(\alpha)\,\mathrm{Cos}(\gamma) + \mathrm{Sin}(\alpha)\,\mathrm{Sin}(\beta)\,\mathrm{Sin}(\gamma) & \mathrm{Cos}(\gamma)\,\mathrm{Sin}(\alpha)\,\mathrm{Sin}(\beta) - \mathrm{Cos}(\alpha)\,\mathrm{Sin}(\gamma) \\ -\mathrm{Sin}(\beta) & \mathrm{Cos}(\beta)\,\mathrm{Sin}(\gamma) & \mathrm{Cos}(\beta)\,\mathrm{Cos}(\gamma) \end{pmatrix}$$

Jak vypočítat ze známé rotační matice Eulerovy úhly

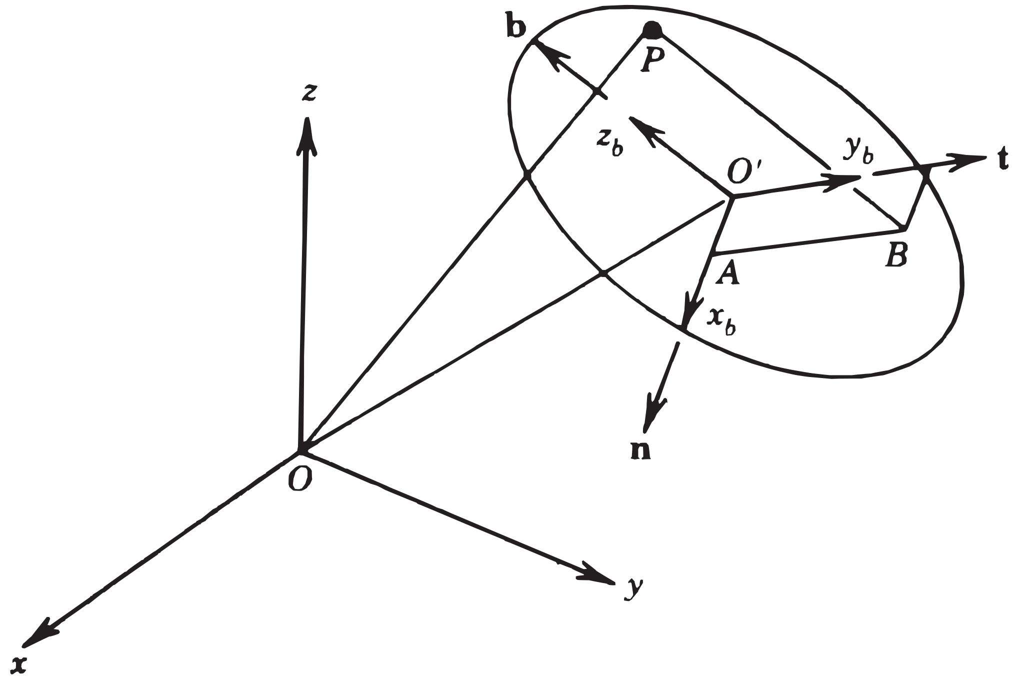
- Mějme známou matici **R** (3×3) a symbolickou matici, která vznikla složením tří rotací definovaných třemi úhly. Máme najít tyto tři úhly. Symbolická matice, která vznikla rotacemi okolo kolmých os má zvláštní tvar, podobný maticím na výše uvedeném slidu. Máme tedy řešit rovnici podobnou (ne nutně stejnou) jako rovnice (**??**) se třemi neznámými ϕ, θ, ψ.
- Nejdříve je nutné najít v symbolické matici prvek, který je funkcí jen jedné proměnné (v našem případe je to monom). Tento prvek (v příkladu na třetím řádku ve třetím sloupci) je ve tvaru buď $\pm\cos$ nebo $\pm\sin$. Tento prvek může být přímo použit k nalezení hodnoty první neznámé. Poznamenejme, že obecně jsou v každém intervalu délky 2π dvě řešení.
- Když je určen první úhel, další mohou být určeny pomocí funkce `atan2` porovnáním elementů v řádku a sloupci, v kterém se nachází pivot.
- Je nutné ošetřit situaci, kdy pivot v konstantní matici má hodnotu blízkou ± 1. Jedná se o degenerovaný případ, kdy v každém intervalu délky 2π máme jen jedno řešení. Dalším problémem v této situaci je, že prvky ve sloupci a řádku pivota nelze použít pro určení dalších neznámých, protože konstantní matice obsahuje nuly. Soustředíme se tedy na zbylou podmatici a dosadíme již vypočtenou proměnnou. Zjistíme, že daná podmatice je funkcí součtu nebo rozdílu neznámých a tak dostáváme obecně jednodimenzionální množinu řešení. Při symbolickém řešení můžeme vyjádřit tuto množinu. Pokud úlohu řešíme numericky, můžeme například jeden úhel zafixovat (např. 0). Obecně bychom měli využít další omezení daná úlohou. V robotice tato situace typicky indikuje singulární řešení, např. požadavek kontinuity trajektorie nám napovídá, že máme zjistit polohu ramene před daným bodem a požadovaný pohyb po průchodu daným bodem.
- Jinou situací, kterou je nutné ošetřit jsou problémy spojené s nepřesností měření nebo výpočtů. Ty mohou například způsobit, že prvky v konstantní matici budou větší než 1 a podobně.

Srovnání popisů rotace

Systém	Symbol	Ekvivalent	Par.	Podmínky
Matice rotace	$\mathbf{R}$		9	orthonormální
Vektory os	$\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{b}$	$\mathbf{R}$	9	vektory jednotkové, navzájem kolmé
Eulerovy úhly	ϕ, θ, ψ	yaw, pitch, roll,...	3	
Quaternion	$\mathbf{q}$		4	jednotkový vektor
Osa, úhel	$\theta, \mathbf{s}$	quaternion	4	jednotkový vektor

Systém	Výhody	Nevýhody	Užíván
$\mathbf{R}$	snadné výpočty poloh	redundantní	Matlab toolbox
$\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{b}$	srozumitelný	redundantní	
ϕ, θ, ψ	neredundantní	složitá topologie	Mitsubishi
			Staubli, CRS
$\mathbf{q}$	snadná interpolace	redundantní	ABB
	rozumná topologie		
$\theta, \mathbf{s}$	srozumitelný	redundantní	

Transformace souřadnic



Známe polohu bodu v souřadném systému $O' - x^b y^b z^b$: $\mathbf{x}^b = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ a hledáme polohu v souřadném systému $O - xyz$: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\vec{OP'} = \vec{OO'} + \vec{O'A} + \vec{AB} + \vec{BP}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_o + u\mathbf{n} + v\mathbf{t} + w\mathbf{b}$$

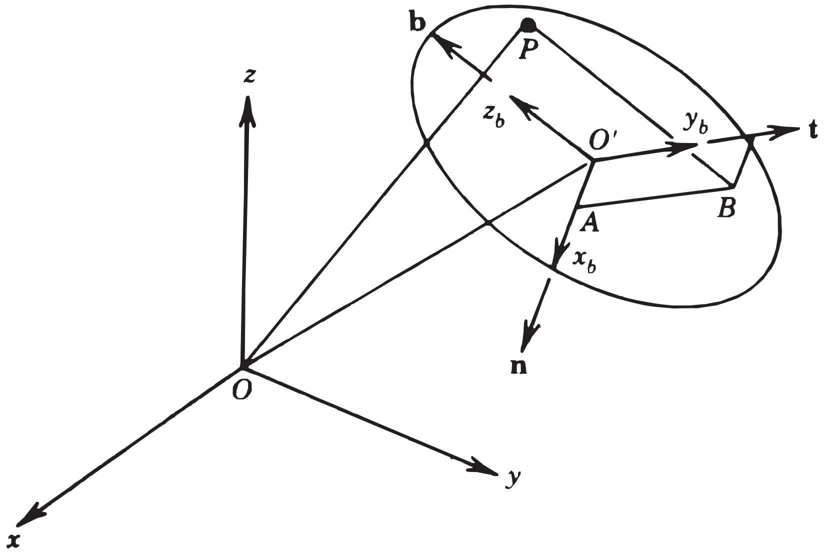
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_o + \mathbf{R}\mathbf{x}^b$$

Obrácená transformace:

$$\mathbf{x}^b = -\mathbf{R}^T\mathbf{x}_o + \mathbf{R}^T\mathbf{x}$$

Transformace bodu z jedné souřadné soustavy do jiné.

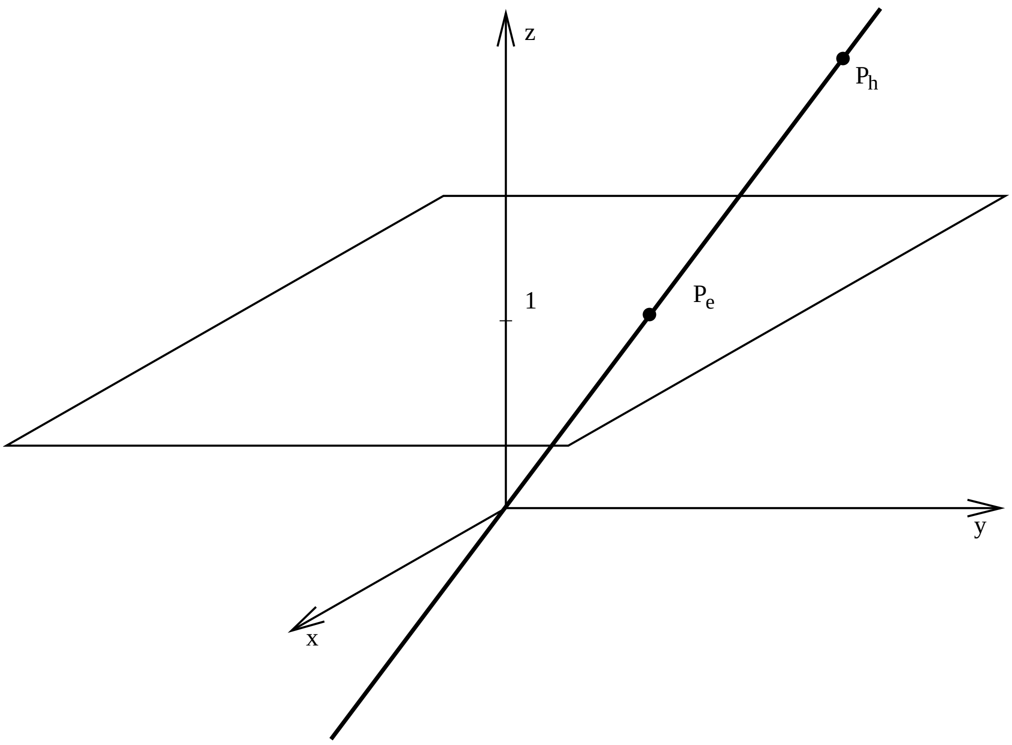
m p
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36



$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + u\mathbf{n} + v\mathbf{t} + w\mathbf{b}$$

Známe souřadnice bodu P v souřadném systému $O' - x^b y^b z^b$ a zapíšeme je jako $\mathbf{x}_b = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$.
Souřadný systém $O' - x^b y^b z^b$ je popsán v souřadném systému $O - xyz$ souřadnicemi jeho počátku $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix}$ a vektory $(\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{b})$.
Jak zapíšeme souřadnice bodu P v souřadném systému $O - xyz$?

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_o + u\mathbf{n} + v\mathbf{t} + w\mathbf{b}$$



Homogenní souřadnice

Zaveďme homogenní souřadnice takto:

Euklidovské (metrické)		Homogenní - projektivní
$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	$\Rightarrow$	$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$
$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \\ z/w \end{pmatrix}$	$\Leftarrow$	$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \wedge w \neq 0$
neexistuje (nevlastní bod)	$\Leftarrow$	$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$

Lze snadno ukázat, že v homogenních souřadnicích:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}^b,$$

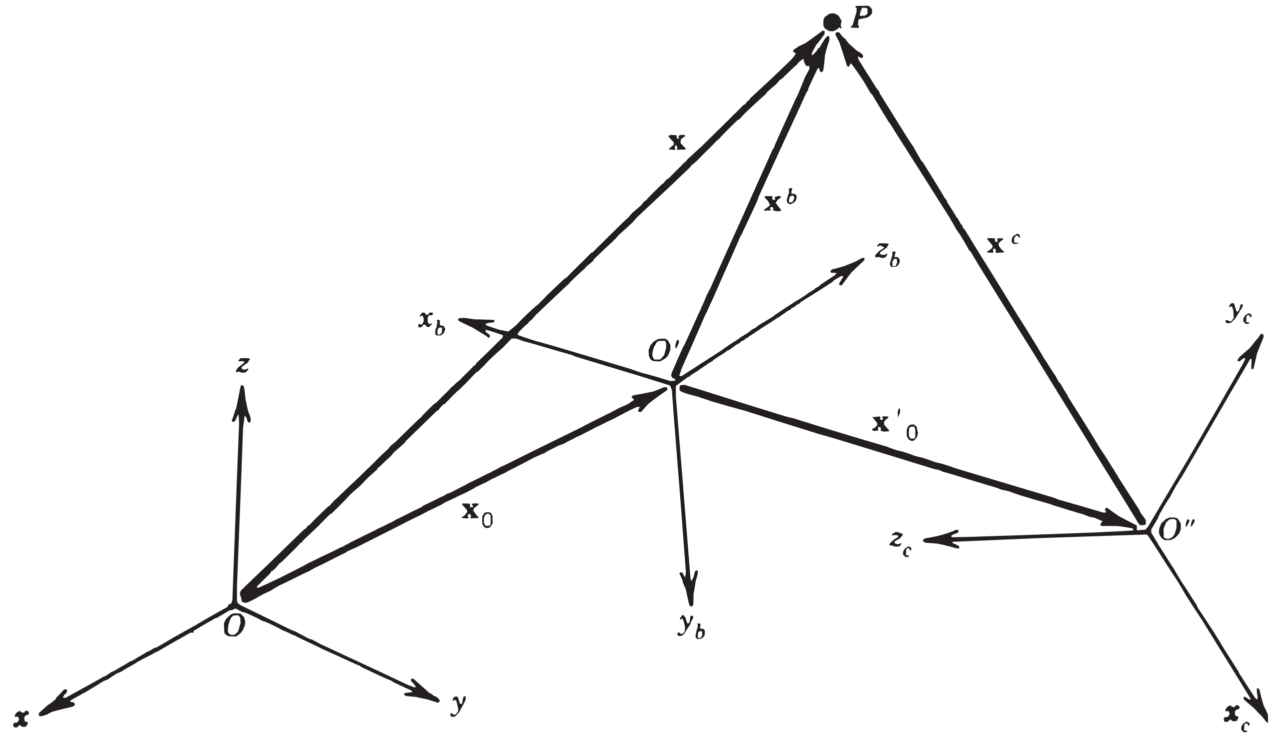
kde $\mathbf{A}$ je matice 4x4:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{x}_o \\ 0\,0\,0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverzní matice:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T\mathbf{x}_o \\ 0\,0\,0 & 1 \end{bmatrix}$$

Posloupnost transformací souřadnic



Transformace přes více souřadných systémů

$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 \mathbf{A}_4^3 \dots \mathbf{A}_n^{n-1} \mathbf{x}^n. \tag{12}$$

Přímá a inverzní kinematická úloha

Řídicí jednotka robotu většinou měří vnitřní kinematické parametry robotu – kloubové souřadnice. Tyto souřadnice určují polohu jednotlivých kloubů, tedy vzájemnou polohu sousedních ramen. Kloubové souřadnice označujeme $\vec{q}$, kloubovou souřadnici otočného kloubu označujeme θ, kloubovou souřadnici posuvného klobu označujeme d.

Uživatele zajímá poloha chapadla nebo manipulovaného (tuhého) tělesa. Tato poloha má 6 stupňů volnosti a může být popsána různými popisy, například tranformační maticí popisující polohu souřadného systému chapadla ve světovém souřadném systému.

Naším úkolem je najít vztahy mezi těmito popisy polohy robotu.

Studenti si často pletou polohu chapadla (má 6 stupňů volnosti) s polohou středu chapadla (to je bod a má 3 stupně volnosti). Toto je hrubá chyba, protože orientace chapadla je téměř vždy důležitá, ať se jedná o manipulaci nebo např. sváření robotem.

Přímá kinematická úloha

m p

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

Přímá kinematická úloha je zobrazení z prostoru kloubových souřadnice do prostoru poloh chapadla. To znamená, že známe polohy všech (nebo některých) kloubů a hledáme polohu chapadla ve světovém souřadném systému. Matematicky:

$$\vec{q} \to \mathbf{T}(\vec{q})$$

Přímé použití tohoto vztahu je v souřadnicových měřicích přístrojích. Snímače na jednotlivých kloubech nás informují o vzájemné poloze ramen, kloubových souřadnicích, úkolem je vypočítat, kde se nachází hrot měřicího přístroje.

Zdůrazněme, že jde o zobrazení, nikoliv o matematickou funkci. Přímá kinematická úloha může mít pro konkrétní parametry $\vec{q}$ žádné, jedno, několik nebo nekonečně mnoho řešení.

Inverzní kinematická úloha je zobrazení z prostoru poloh chapadla do prostoru kloubových souřadnic. To znamená, že známe polohu chapadla ve světovém souřadném systému a hledáme polohy všech kloubů. Matematicky:

$$\mathbf{T} \rightarrow \vec{q}(\mathbf{T})$$

Inverzní kinematická úloha je potřeba například při řízení manipulátoru. Uživatel zadává požadovanou polohu chapadla, pro řízení jsou ale potřeba kloubové souřadnice.

Zdůrazněme, že jde o zobrazení, nikoliv o matematickou funkci. Inverzní kinematická úloha může mít pro konkrétní parametry $\vec{q}$ žádné, jedno, několik nebo nekonečně mnoho řešení.