Matematická morfologie

Václav Hlaváč

České vysoké učení technické v Praze

Český institut informatiky, robotiky a kybernetiky

160 00 Praha 6, Jugoslávských partyzánů 1580/3

http://people.ciirc.cvut.cz/hlavac, vaclav.hlavac@cvut.cz

také z Centra strojového vnímání, http://cmp.felk.cvut.cz

Poděkování: Petr Matula

Osnova přednášky:

- Bodové množiny. Morfologická transformace.
- Eroze, dilatace, vlastnosti.
- Otevření, uzavření, tref či miň.
- Kostra oblasti.
- Ztenčování, sekvenční ztenčování.
- Vzdálenostní transformace.

Morfologie

V biologii: studium velikosti, tvaru a vnitřní struktury zvířat, rostlin a mikroorganismů a hledání souvislostí mezi jejich vnitřními částmi.

V jazykovědě: studium vnitřní stavby slovních druhů.

V nauce o materiálech: studium tvarů, velikostí, textury, termodynamicky odlišitelné fáze fyzikálních objektů.

V teorii signálů / zpracování obrazu: matematická morfologie – teoretický model opírající se o teorii svazů a používaný pro předzpracování, segmentaci obrazu, atd.

Matematická morfologie, úvod

Matematická morfologie (MM)

- je teorií k analýze plošných a prostorových struktur;
- je vhodná pro analyzování tvaru objektu;
- je založena na teorii množin, integrální algebře a algebře svazů (angl. lattice);
- je úspěšná i kvůli jednoduchému matematickému formalismu, který otevírá cestu k mocným nástrojům pro analýzu obrazu.

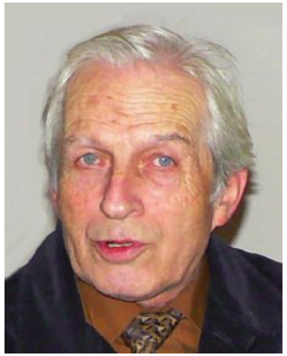
Přístup matematické morfologie . . .

Hlavní myšlenkou morfologické analýzy je získávání znalostí z relace obrazu a jednoduché, malé sondy (nazývané strukturní element), která je předdefinovaným tvarem. V každém pixelu se ověřuje, jak sonda odpovídá nebo neodpovídá lokálním tvarům v obraze.

Průkopníci matematické morfologie

Georges Matheron
$*1930$, $\dagger 2000$

Jean Serra
$*1940$



Ivan Saxl
$*1936$, $\dagger 2009$

Josef Mikeš
$*1946$

- Matheron, G. Elements pour une Theorie del Milieux Poreux Masson, Paris, 1967.
- Serra, J. Image Analysis and Mathematical Morphology, Academic Press, London 1982.

V Československu byli prvními propagátory matematické morfologie v 70. letech 20. století Ivan Saxl a Josef Mikeš.

Další čtení

- Jean Serra a jeho kurz matematické morfologie: http://www.cmm.mines-paristech.fr/~serra/cours/
- Jean Serra, Image analysis and mathematical morphology. Volume 2: theoretical advances, Academic Press, London, 1988
- Pierre Soille, Morphological Image Analysis: Principles and Applications, Second edition, Springer-Verlag Berlin, 2004
- Laurent Najman and Hugues Talbot (editors), Mathematical Morphology, John Wiley & Sons, Inc., London, 2010

Spojení s jinými teoriemi a přístupy

Matematická morfologie nesoupeří s jinými teoriemi, spíše je doplňuje.

- Diskrétní geometrie (např. vzdálenost, kostra oblasti).
- Teorie grafů, např. minimální kostra grafu (O. Borůvka 1926), rozvodí, výpočetní geometrie.
- Statistika: náhodné modely, teorie míry, stereologie, atd.
- Lineární teorie signálů: nahradí se operace $+$ operací supremum $\vee$.
- Prostor měřítek: gaussovské vyhlazování nahradí se otevřením a uzavřením $\Rightarrow$ granulometrie.
- Level sets: dilatace s parciálními diferenciálními rovnicemi. FMM (Fast Marching Method) je vlastní vzdálenostní funkce.
- *Poznámka: pro matematickou morfologii nejsou podobné nástroje jako Fourierova a vlnková transformace.*

Různost matematických struktur

Zpracování signálu ve vektorovém prostoru

Vektorový prostor tvoří množina vektorů V a množina skalárů K takových, že

- K je pole.
- V je komutativní grupa.
- Vektory lze sčítat a násobit skalárem.

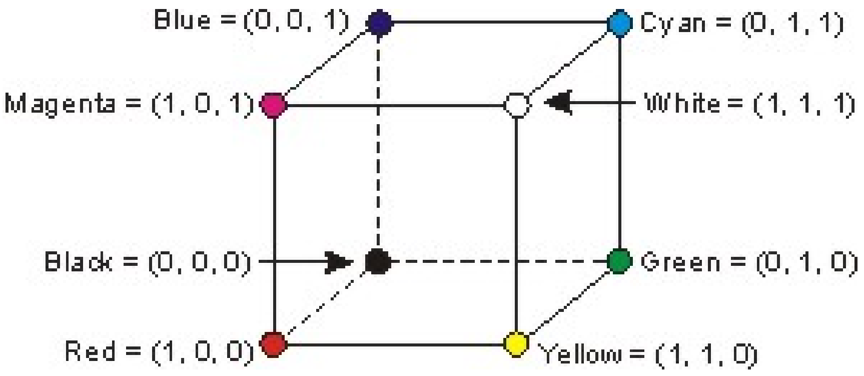
Matematická morfologie

Úplný svaz $(E, \sqsubseteq)$ je množina E s relací uspořádání $\sqsubseteq$ takovou, že

- $\forall x, y, z \in E$ platí (částečné uspořádání)
  $x \sqsubseteq x$,
  $x \sqsubseteq y$, $y \sqsubseteq x \Rightarrow x = y$,
  $x \sqsubseteq y$, $y \sqsubseteq z \Rightarrow x \sqsubseteq z$.
- Pro všechna $P \subseteq E$ existuje v E (úplnost)
  - Největší dolní odhad $\bigwedge P$, nazývaný infimum.
  - Nejmenší horní odhad $\bigvee P$, nazývaný supremum.

Příklady svazů

- Svaz barev v aditivním barevném modelu (RGB).



- Svaz reálných čísel $\mathbb{R}$.
- Svaz reálných čísel rozšířených o nekonečno $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
- Svaz celých čísel $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
- Kartézský součin přirozených čísel uspořádaný relací $\leq$ tak, aby $(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow (a \leq c)$ & $(b \leq d)$.

Příklady uspořádaných svazů užitečných v analýze obrazu

- Booleovský svaz množin uspořádaných inkluzí $\Rightarrow$ binární matematická morfologie, kde nás např. zajímá obsazenost pixelu.
- Svaz horních polospojitých funkcí $\Rightarrow$ šedotónová matematická morfologie nebo binární morfologie ve 3D binárních obrazech, kde nás zajímá obsazenost určitého voxelu.

  Poznámka: Zobecnění do vyšších dimenzí je také možné, např. pro n-rozměrné obrazy nebo pro více hodnotové funkce, např. časové řady při analýze pohybu.
- Svaz vícehodnotových funkcí $\Rightarrow$ matematická morfologie barevných obrazů.

Srovnání základních operací

Lineární zpracování signálů

- Lineární teorie signálu se opírá o “princip superpozice”. Základními operacemi jsou sčítání, násobení a skalární součin.
- Základní operace zachovávají sčítání, násobení a jsou vzhledem k nim komutativní.

$$\Psi\left(\sum_i \lambda_i\, f_i\right) = \sum_i \lambda_i\, \Psi(f_i)\ .$$

- Důležitou operací je konvoluce dovolující hledat relaci mezi dvěma funkcemi.

Matematická morfologie

- Svaz je založen na uspořádání, existenci suprema $\vee$ a infima $\wedge$. Základní operace zachovávají supremum a infimum.
- Je zachováno uspořádání $\{x \sqsubseteq y \Rightarrow \Psi(x) \sqsubseteq \Psi(y)\} \Leftrightarrow$ Ψ je rostoucí.
- Komutování vzhledem k supremu $$\Psi\left(\bigvee_i x_i\right) = \bigvee_i \Psi(x_i) \Leftrightarrow \text{dilatace}.$$
- Komutování vzhledem k infimu $$\Psi\left(\bigwedge_i x_i\right) = \bigwedge_i \Psi(x_i) \Leftrightarrow \text{eroze}.$$

Symetrie suprema a infima; dualita

- Supremum $\vee$ a infimum $\wedge$ mají ve svazu symetrickou roli.
  - Zamění se, když se změní uspořádání $x \sqsubseteq y \leftrightarrow x \sqsupseteq y$.
  - To přivádí k pojmu dualita.
- Příklad: ve svazu všech podmožin množiny $E(2^E; \sqsubseteq)$,

  se o dvou operacích Ψ a Ψ^* se říká, že jsou duální, právě když

$$\Psi(X^C) = [\Psi^*(X)]^C ,$$

kde $X^C = E \setminus X$ označuje doplněk množiny X vzhledem k množině E.

Svazy a uspořádání; extenzivní a antiextenzivní transformace

- Operace Ψ je extenzivní ve svazu $(E, \sqsubseteq)$, právě když je transformovaný prvek pro všechny prvky z množiny E větší nebo rovný původnímu prvku, tj.

$$\Psi \text{ je extenzivní } \Leftrightarrow \forall\, x \in E, \quad x \sqsubseteq \Psi(x)\,.$$

- Operace Ψ je antiextenzivní ve svazu $(E, \sqsubseteq)$, právě když je transformovaný prvek pro všechny prvky z množiny E menší nebo rovný původnímu prvku, tj.

$$\Psi \text{ je antiextenzivní } \Leftrightarrow \forall\, x \in E, \quad \Psi(x) \sqsubseteq x\,.$$

Proč tak abstraktně?

- Protože tak můžeme zavést operátory, které jsou obecné.
- Operátory lze studovat, aniž by byl dán jejich definiční obor.
- Operátory mohou být použity např. pro následující aplikační oblasti či definiční obory, např. diskrétní obrazy, spojité obrazy, grafy, sítě bodů.
- Q: Jak lze použít formalismu svazů pro obrazy?

  A: Obrazy lze považovat za funkci $f: E \to T$, kde E množina obrazových bodů a T je obor hodnot, tj. pro obrazy za množinu přípustných hodnot pixelu (viz dále).

Svazy funkcí

- E libovolná množina a T je uzavřená podmnožina $\overline{\mathbb{R}}$ nebo $\overline{\mathbb{Z}}$.
- Funkce $f\colon E \to T$ generují nový svaz T^E.
  (T^E označuje zkráceně kartézský součin $\underbrace{T \times T \times \ldots \times T}_{|E| \text{ times}}$),

$$f \sqsubseteq g\,,\ \text{právě když } f(x) \le g(x) \text{ pro } \forall x \in E\,,$$

  jejichž supremum a infimum se odvozují přímo ze suprema a infima množiny T,

$$\left(\bigvee_i f_i\right)(x) = \bigvee_i f_i(x) \qquad \left(\bigwedge_i f_i\right)(x) = \bigwedge_i f_i(x)\,.$$

- Přístup lze zobecnit pro funkce více proměnných, např. v analýze obrazu pro barevné obrazy nebo pohyb (videosekvence).

Jednoduchý případ; zavedení svazu pro binární obrázky

- Existuje několik způsobů, jak zavést svaz a vyplývající morfologické operace.
- Začněme jednoduchými, názornými a prakticky užitečnými binárními obrazy,

$$f\colon E \to \{0,1\}\,,$$

$$F = \{x \in E \mid f(x) = 1\}\ .$$

- Algebraická struktura, tj. svaz $(E, \sqsubseteq)$ se pro binární obrazy zavede takto:

$$(2^E, \subseteq)\ \text{, kde}$$

  - $X \sqsubseteq Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$,
  - infimum $\wedge$ se nahradí průnikem $\cap$,
  - supremum $\vee$ se nahradí sjednocením $\cup$.

Bodové množiny

- Obrázky lze modelovat pomocí bodových množin libovolné dimenze, např. v N-rozměrném euklidovském prostoru.
- 2D euklidovský prostor $\mathbb{E}^2$ a systém jeho podmnožin je přirozeným spojitým definičním oborem pro popis rovinných útvarů.
- Digitální protějšek euklidovského prostoru se reprezentuje celými čísly $\mathbb{Z}$.
- Binární matematická morfologie ve 2D – bodová množina vyjádřená dvojicemi celých čísel $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Výskyt bodu informuje o obsazenosti příslušného pixelu (nebo příslušného voxelu v případě 3D obrázku).
- Binární matematická morfologie ve 3D – bodová množina vyjádřená trojicemi celých čísel $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$, kde (x, y, z) jsou prostorové souřadnice informující o obsazenosti příslušného voxelu.
- Šedotónová matematická morfologie ve 2D – bodová množina vyjádřená trojicemi celých čísel $(x, y, g) \in \mathbb{Z}^3$, kde x, y jsou souřadnice v rovině a g je hodnota šedi příslušného pixelu.

Čtyři principy matematické morfologie

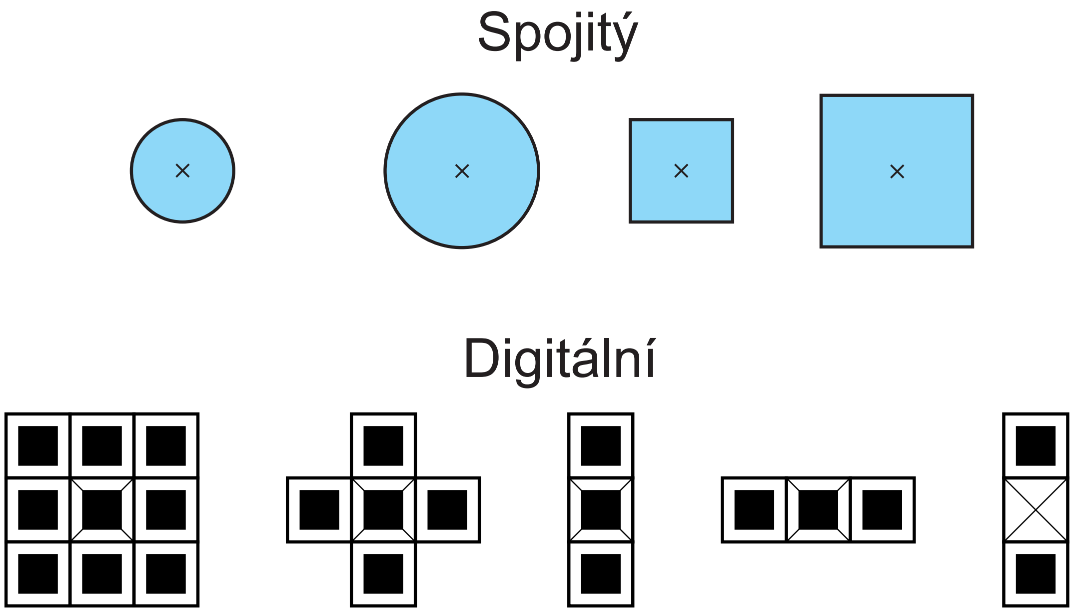
1. Kompatibilita vůči translaci – morfologický operátor Ψ má být nezávislý na translaci.
2. Kompatibilita vůči změně měřítka – morfologický operátor Ψ má být nezávislý na změně měřítka.

   Poznámka: V případě digitálních obrazů je tento princip (mírně) porušen.
3. Lokální znalost – morfologický operátor Ψ je lokálním operátorem (viz strukturní elementy, které brzy zavedeme).
4. Polospojitost – morfologický operátor by neměl vykazovat náhlé změny svého chování.

   Polospojitost shora a polospojitost zdola jsou pojmy matematické analýzy, slabší než spojitost, ale složeny dohromady, již spojitost implikují. Zhruba řečeno, reálná funkce f je polospojitá v bodě x, pokud pro body y funkce $f(y)$ není o mnoho větší než $f(x)$.

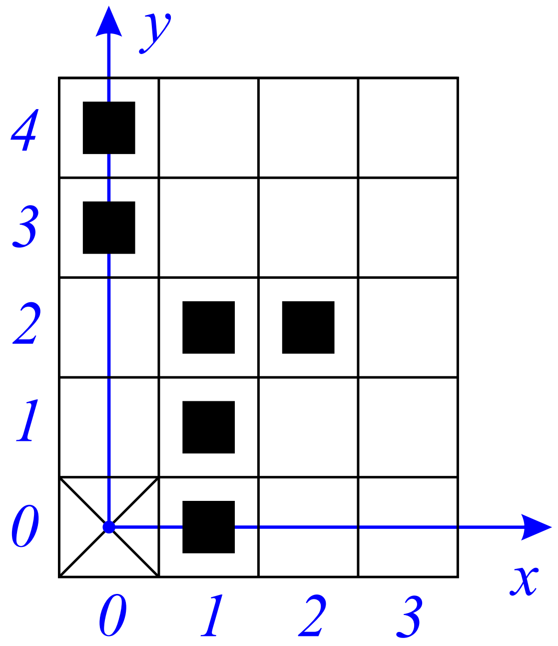
Strukturní element

- Strukturní element slouží v morfologických operacích jako lokální sonda.
- Strukturní element B je vztažen k “lokálnímu” počátku v bodě $\mathcal{O}$ (označeném v následujících obrázcích symbolem $\times$).
- Příklady:



Začneme binární matematickou morfologií, bodová množina

- Zpočátku se omezíme na binární matematickou morfologii.
- Příklad bodové množiny v $\mathbb{Z}^2$,

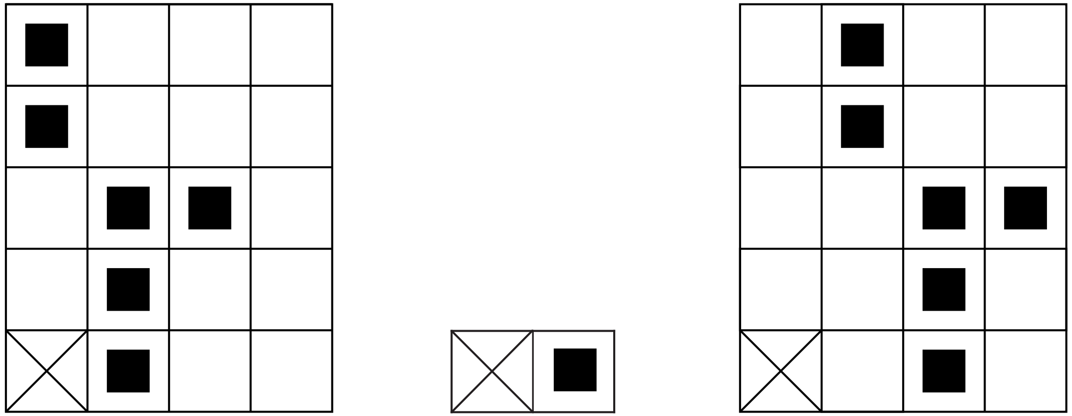


$$X = \{(1,0),(1,1),(1,2),(2,2),(0,3),(0,4)\}$$

Translace množiny o radiusvektor

Translace X_h bodové množiny X o radiusvektor h

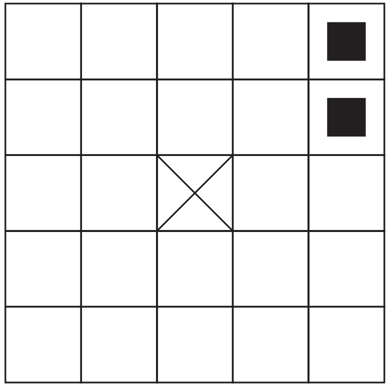
$$X_h = \left\{ p \in \mathbb{E}^2,\ p = x + h \ \text{ pro některá } x \in X \right\} .$$



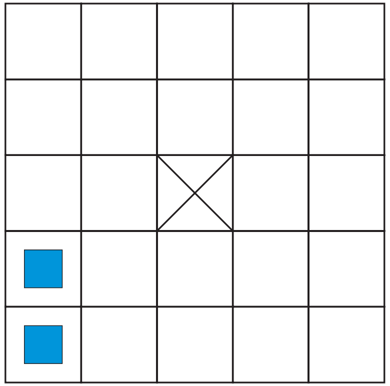
X h X_h

Symetrická bodová množina

- Středová symetrie se vyjadřuje vůči reprezentativnímu bodu $\mathcal{O}$.
- Někdy se také nazývá transponovaná bodová množina.
- Definice: $\breve{B} = \{-b : \; b \in B\}$.
- Příklad: $B = \{(2,1),(2,2)\}$, $\quad \breve{B} = \{(-2,-1)(-2,-2)\}$.



Originál



Po transpozici

Binární matematická morfologie

- Pracuje s binárními obrázky. Definiční obor $\mathbb{Z}^2$. Obor hodnot $\{0, 1\}$.
- Dvě základní operace: dilatace a eroze. Nejsou invertovatelné.
- Dva používané formalismy pro součet a rozdíl
  - Ve školské aritmetice obvyklé sčítání a odečítání.
  - Minkowského součet, rozdíl.

    Do matematické morfologie zavedli G. Matheron v knize ve francouzštině z 1967, J. Serra v knize v angličtině z 1982.
  - Rozdílnost obou přístupů hraje roli u eroze.

Minkowského součet, rozdíl

Minkowského součet (Hermann Minkowski 1864-1909, geometrie čísel 1889)

$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b \, .$$

Minkowského rozdíl (pojem zavedl až H. Hadwiger v roce 1957)

$$X \ominus B = \bigcap_{b \in B} X_{-b} \, .$$

Binární dilatace $\oplus$

- Dilatace je Minkowského součet, tj. sjednocení posunutých bodových množin

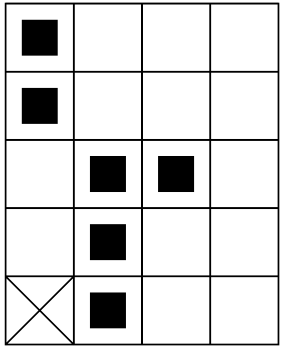
$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b \,.$$

- Operaci dilatace $\oplus$ vyjádřil ve funkčním tvaru J. Serra jako δ.
- Dilataci lze ekvivalentně vyjádřit jako funkci δ,

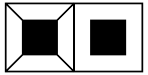
$$\delta_B(X) = X \oplus B = \left\{p \in \mathbb{E}^2 : \; p = x + b, \;\; x \in X \text{ and } b \in B\right\} \,.$$

Binární dilatace $\oplus$, příklad

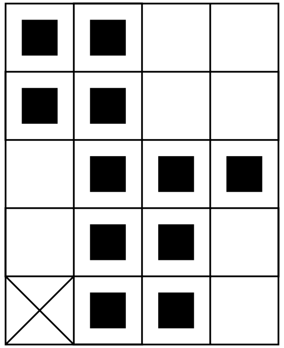
$$
\begin{aligned}
X &= \{(1,0),(1,1),(1,2),(2,2),(0,3),(0,4)\} \\
B &= \{(0,0),(1,0)\} \\
X \oplus B &= \{(1,0),(1,1),(1,2),(2,2),(0,3),(0,4), \\
&\quad (2,0),(2,1),(2,2),(3,2),(1,3),(1,4)\}
\end{aligned}
$$



X



B



$X \oplus B$

Binární dilatace isotropickým strukturním elementem 3×3

vlevo – originál, vpravo – dilatace.

Dilatace se používá k zaplnění malých děr a úzkých zálivů v objektech. Zvětší původní velikost objektu. Má-li být velikost zachována, potom se dilatace kombinuje s erozí, viz dále.

Vlastnosti dilatace

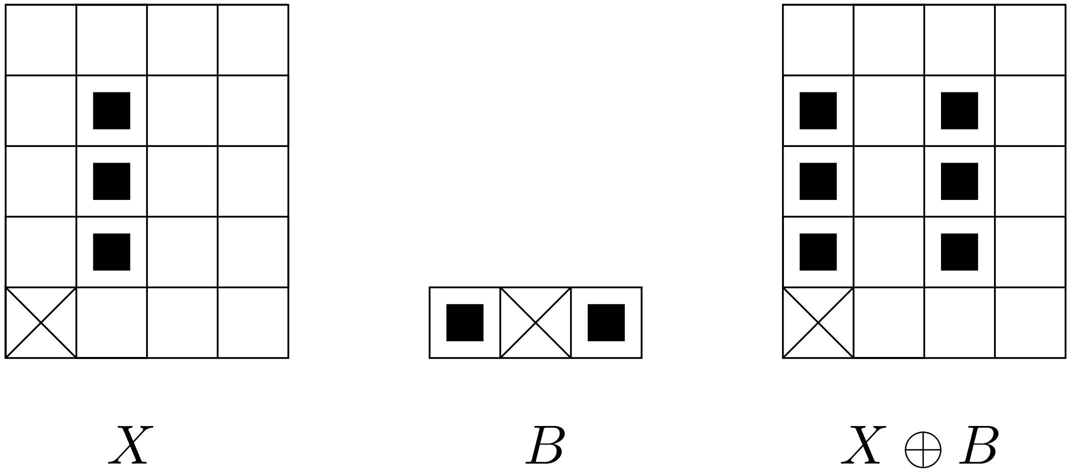
Komutativní: $X \oplus B = B \oplus X$.

Asociativní: $X \oplus (B \oplus D) = (X \oplus B) \oplus D$.

Invariantní vůči posunu: $X_h \oplus B = (X \oplus B)_h$.

Rostoucí transformace: Je-li $X \subseteq Y$ a $(0,0) \in B$, potom $X \oplus B \subseteq Y \oplus B$.

Protipříklad při prázdném počátku $(0,0) \notin B$



Binární eroze $\ominus$

- Eroze je Minkowského rozdíl, tj. průnik všech posunů obrazu X o vektory $-b \in B$,

$$X \ominus B = \bigcap_{b \in B} X_{-b} \, .$$

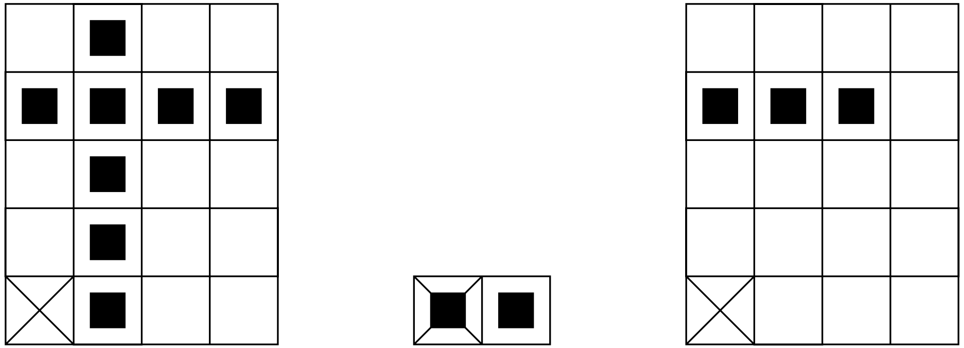
- Ekvivalentně se pro každý bod obrazu p se ověřuje, zda pro všechna možná $x + b$ leží výsledek v X. Pokud ano, je výsledek 1, jinak 0. Tuto myšlenku vyjadřuje zápis ve formě funkce ϵ_B,

$$\epsilon_B(X) = X \ominus B = \{p \in \mathbb{E}^2 : \; p = x + b \in X \text{ for all } b \in B\} \, .$$

- Dilatace a eroze jsou duální morfologické operace.

Binární eroze $\ominus$, příklad

$$
\begin{aligned}
X &= \{(1,0),(1,1),(1,2),(0,3),(1,3),\\
&\quad (2,3),(3,3),(1,4)\}\\
B &= \{(0,0),(1,0)\}\\
X \ominus B &= \{(0,3),(1,3),(2,3)\}
\end{aligned}
$$

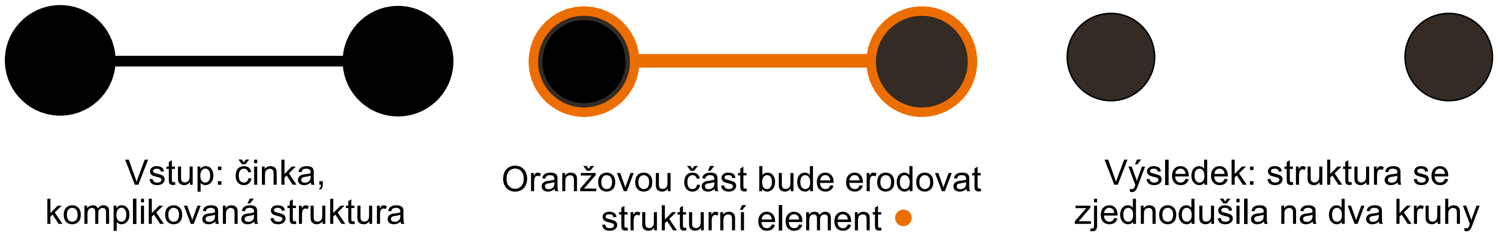


X B $X \ominus B$

Binární eroze isotropickým strukturním elementem 3×3

vlevo – originál, vpravo – eroze.

- Objekty menší než strukturní element vymizí (např. čáry tloušťky 1).
- Eroze se používá ke zjednodušení struktury (rozložení objektu na jednodušší části).



Obrys pomocí binární eroze

Obrys ∂X množiny X.

Matematicky jde o hranici, v našem významu o hranici oblasti X v binárním obraze. Obrys poskytuje hranici oblasti o přirozené tloušťce 1. Strukturní element B je 3×3, isotropický.

$$\partial X = X \setminus (X \ominus B) \,.$$

vlevo – originál X, vpravo obrys ∂X.

Vlastnosti eroze

Antiextenzivní: Je-li $(0,0) \in B$, potom $X \ominus B \subseteq X$.

Invariantní vůči posunu: $X_h \ominus B = (X \ominus B)_h$, $X \ominus B_h = (X \ominus B)_{-h}$.

Zachovává inkluzi: Je-li $X \subseteq Y$, potom $X \ominus B \subseteq Y \ominus B$.

Dualita eroze a dilatace: $(X \ominus Y)^C = X^C \oplus \breve{Y}$.

Kombinace eroze a průniku: $(X \cap Y) \ominus B = (X \ominus B) \cap (Y \ominus B)$,
$B \ominus (X \cap Y) \supseteq (B \ominus X) \cup (B \ominus Y)$.

Vlastnosti dilatace a eroze (2)

Lze zaměnit pořadí dilatace a průniku:

$(X \cap Y) \oplus B = B \oplus (X \cap Y) \subseteq (X \oplus B) \cap (Y \oplus B)$.

Dilatace průniku dvou obrazů je obsažena v průniku jejich dilatací.

Možná záměna pozadí eroze a množinového sjednocení (umožňuje rozložit složitější strukturní elementy na sjednocení jednodušších):

$$\begin{aligned} B \oplus (X \cup Y) = (X \cup Y) \oplus B &= (X \oplus B) \cup (Y \oplus B)\,, \\ (X \cup Y) \ominus B &\supseteq (X \ominus B) \cup (Y \ominus B)\,, \\ B \ominus (X \cup Y) &= (X \ominus B) \cap (Y \ominus B)\,. \end{aligned}$$

Vlastnosti dilatace a eroze (3)

Postupná dilatace (resp. eroze) obrazu X nejdříve strukturním elementem B a potom strukturním elementem D je totožná jako dilatace (resp. eroze) obrazu X pomocí $B \oplus D$

$$\begin{aligned}(X \oplus B) \oplus D &= X \oplus (B \oplus D)\,,\\(X \ominus B) \ominus D &= X \ominus (B \oplus D)\,.\end{aligned}$$

Morfologická filtrace

- V "klasickém" zpracování signálů/obrazů označuje pojem filtr jakoukoliv výpočetní proceduru, která má signál/obrázek na vstupu i výstupu.
- V matematické morfologii má pojem filtr přesný význam, tj.

> Operace Ψ je morfologickým filtrem $\Leftrightarrow$ Ψ je nerostoucí a idempotentní.

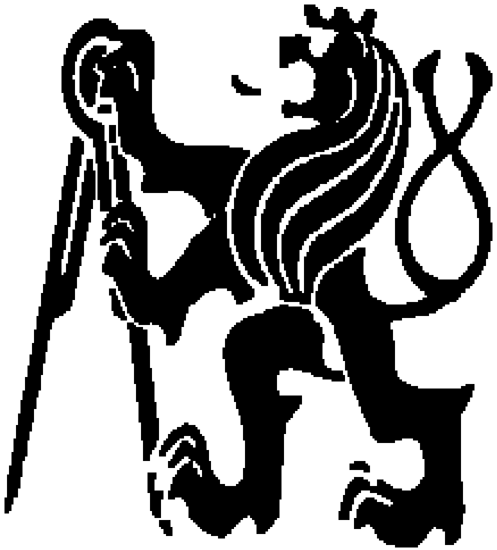
- Slovy: morfologické filtry zachovávají uspořádání a konvergují během konečného počtu iterací.
- Nejdůležitějšími operacemi v tomto kontextu jsou otevření a uzavření.
- Otevření jsou antiextenzivními morfologickými filtry.
- Uzavření jsou extenzivními morfologickými filtry.

Binární otevření ∘

Eroze následovaná dilatací.

$$X \circ B = (X \ominus B) \oplus B$$

Pokud se obraz X po otevření strukturním elementem B nezmění, říkáme, že je otevřený vzhledem k B.

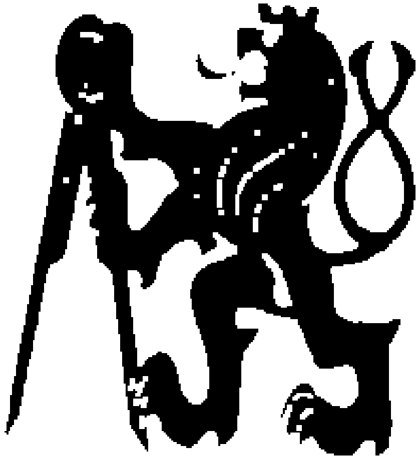


Binární uzavření •

Uzavření je dilatace následovaná erozí.

$$X \bullet B = (X \oplus B) \ominus B$$

Pokud se obraz X nezmění po uzavření strukturním elementem B, říkáme, že je uzavřený vzhledem k B.



Vlastnosti otevření, uzavření

Otevření a uzavření jsou duální morfologické operace a speciálněji morfologické filtry

$$(X \bullet B)^C = X^C \circ \breve{B}$$

Idempotence je vlastností algebraických operací či prvku určité algebry. Operace je idempotentní, pokud jejím opakovaným použitím na nějaký vstup vznikne stejný výstup, jako vznikne jediným použitím dané operace.

Zde speciálně, po jednom otevření, resp. uzavření, je množina již otevřená, resp. uzavřená. Další použití těchto transformací již nic nezmění.

$$X \circ B = (X \circ B) \circ B$$

$$X \bullet B = (X \bullet B) \bullet B$$

Transformace tref či miň $\otimes$

- Anglicky Hit or Miss.
- Používá se složený strukturní element $B = (B_1, B_2)$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

$$X \otimes B = \{x : \; B_1 \subset X \text{ a } B_2 \subset X^c\} \,.$$

- Transformace tref či miň $\otimes$ indikuje shodu složeného strukturního elementu a části obrazu. B_1 testuje shodu s objekty, B_2 shodu s pozadím.
- Transformaci $\otimes$ lze vyjádřit pomocí erozí a dilatací

$$X \otimes B = (X \ominus B_1) \cap (X^c \ominus B_2) = (X \ominus B_1) \setminus (X \oplus \breve{B}_2) \,.$$

Příklad: detekce konvexních rohů

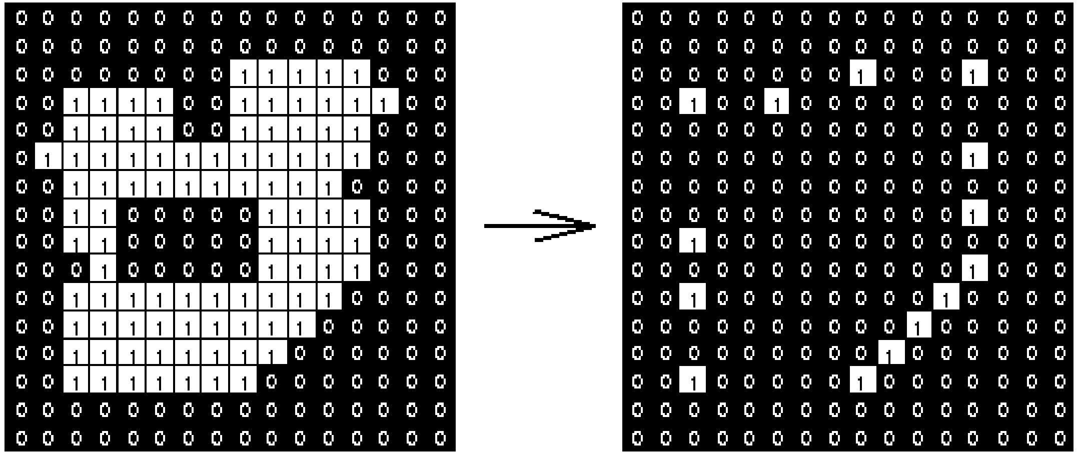
	1	
0	1	1
0	0	

	1	
1	1	0
	0	0

	0	0
1	1	0
	1	

0	0	
0	1	1
	1	

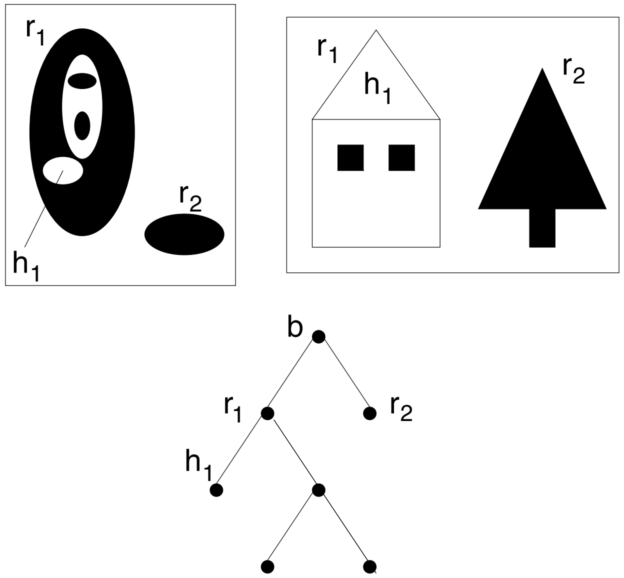
Masky detekující 4 možné konfigurace konvexních rohů pomocí tref či miň.



Výsledek detekce rohů.

Homotopické transformace

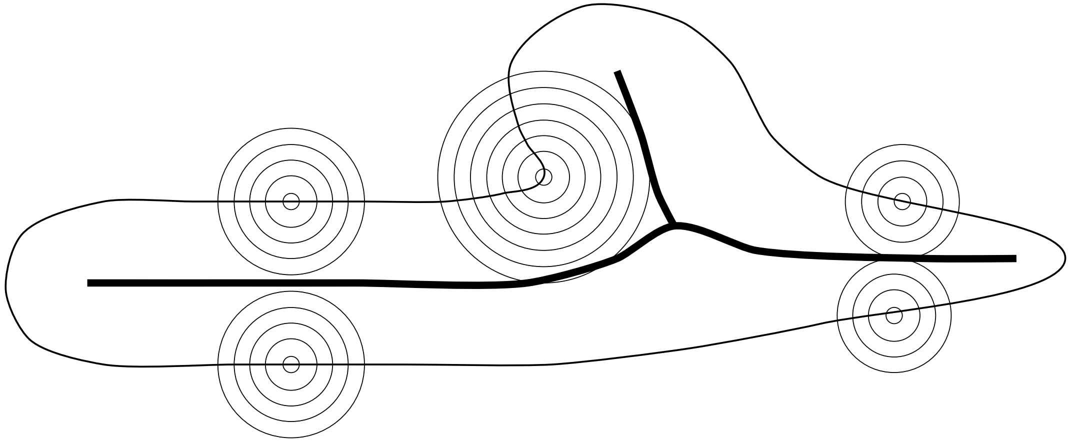
- Opírají se o relaci souvislosti mezi body, oblastmi. Vztahy souvislosti se vyjadřují homotopickým stromem.
- Homotopické transformace nemění homotopický strom. Topologické vztahy se nezmění.



Příklad: dvěma různým obrázkům odpovídá stejný homotopický strom.

Kostra (skelet)

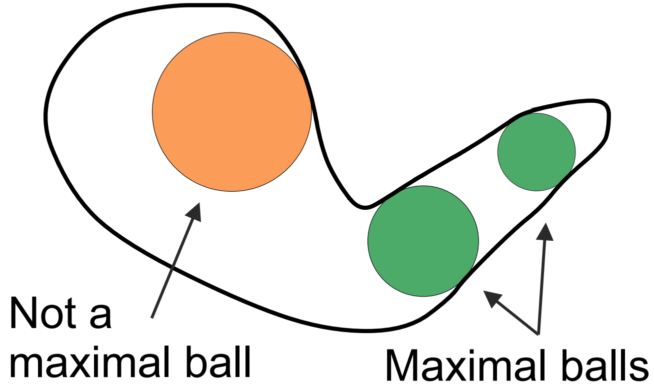
- Podlouhlé objekty má smysl reprezentovat kostrou (např. animace člověka v počítačové grafice zachycující kinematiku).
- Blum v roce 1967 navrhl “Medial axis transformation” (analogie, vypalování trávy).



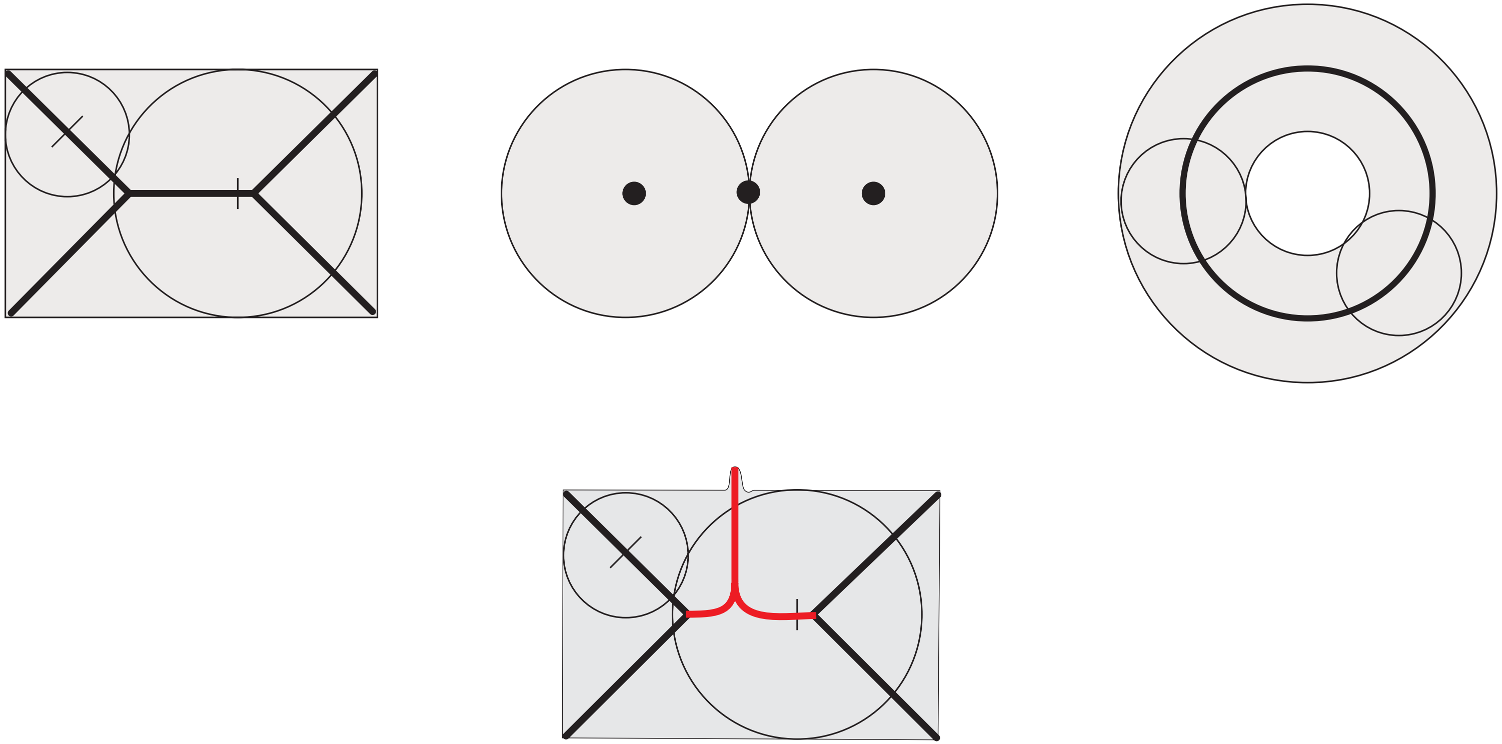
- Formální definice kostry se opírá o pojem maximálního kruhu (koule ve 3D).

Kostra pomocí maximálních kruhu

- Kruh $B(p, r)$ se středem p a poloměrem r, $r \geq 0$ je množina bodů, pro niž je vzdálenost $d \leq r$.
- Maximální kruh B vepsaný do množiny X se dotýká hranice ∂X ve dvou a více bodech.
- Kostra je sjednocením středů maximálních kruhů.



Příklad koster, spojitý případ

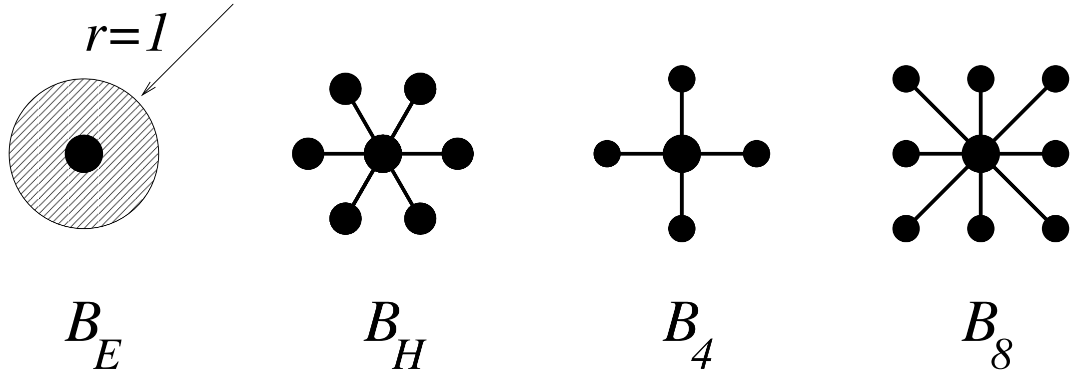


Problémy se šumem.

Diskrétní kruhy o poloměru 1

V diskrétním rastru mohou kruhy vypadat různě, a to díky několika možným způsobům zavedení vzdálenosti.

Příklady:



Třídění algoritmu binární skeletonizace oblastí

- Vpisování kruhů podle definice se prakticky nepoužívá pro přílišnou výpočetní složitost. Porušuje se souvislost. Skelet tloušťky > 1.

- Sekvenční ztenčování. Oblast se eroduje vhodným strukturním elementem, který zaručí, aby nebyla porušena souvislost. Obvykle se použije homotopické ztenčování s využitím strukturních elementů z Golayovy abecedy.
- Přes Voronoiův diagram. Jde o výpočetně náročný postup, a to zvláště pro rozsáhlé a složité objekty.
- Přes **vzdálenostní transformaci**. Rychlý výpočet. Nejčastěji používané.
- V koutkové reprezentaci. Napřed se oblasti bezeztrátově komprimují (koutky). Skelet se počítá vpisováním maximálních obdélníků přímo v komprimovaných datech (M.I. Schlesinger, 1986).

Vlastnosti diskrétních aproximací skeletu

- V diskrétních prostorech (obrázcích) lze získat pouze aproximaci správného spojitého skeletu (kostry).
- Aproximace skeletu má ideálně splňovat dva požadavky, a to na
  - Topologii, tj. má se zachovat souvislost, tj. homotopický strom.
  - Geometrii, tj. části kostry mají být "uprostřed" objektu a být invariantní vůči geometrickým transformacím jako posun, otočení, zvětšení.
- Srovnání

Metoda	*topologie*	*geometrie*
Sekvenční ztenčování	ano	ne
Přes Voronoiův diagram	ano	ano
Přes vzdálenostní transformaci	ne	ano
Přes Schlesingerovy koutky	ano	ano

Ztenčování a ztlušťování

- Nechť X je obraz a $B = (B_1, B_2)$ je složený strukturní element zavedený v transformaci tref či miň.
- Ztenčování $X \oslash B = X \setminus (X \otimes B)$.
  Část ztenčované oblasti určená strukturním elementem B se množinově odečítá od objektu samého.
- Ztlušťování $X \odot B = X \cup (X^c \otimes B)$.
  Oblast se sjednocuje s částí pozadí danou strukturním elementem B.
- Ztenčování a ztlušťování jsou duální transformace $(X \odot B)^c = X^c \oslash B \,, \quad B = (B_2, B_1)$.

Sekvenční ztenčování a ztlušťování

- Nechť $\{B_{(1)}, B_{(2)}, B_{(3)}, \ldots , B_{(n)}\}$ je posloupnost složených strukturních elementů $B_{(i)} = (B_{i_1}, B_{i_2})$.
- Sekvenční ztenčování může být pro čtvercový rastr vyjádřeno pomocí posloupnosti strukturních elementů (např. 8 elementů 3×3, jak uvidíme v Golayově abecedě).

$$X \oslash \{B_{(i)}\} = (((X \oslash B_{(1)}) \oslash B_{(2)}) \ldots \oslash B_{(n)}) \, .$$

- Sekvenční ztlušťování (analogicky)

$$X \odot \{B_{(i)}\} = (((X \odot B_{(1)}) \odot B_{(2)}) \ldots \odot B_{(n)}) \, .$$

Užitečné sekvence z Golayovy abecedy

- Existuje několik posloupností strukturních elementů $\{B_{(i)}\}$, které jsou z praktického pohledu užitečné.
- Ukažme jen dvě z nich z Golayovy abecedy (1969) pro oktagonální rastr. Strukturní elementy rozměru 3×3 uvedeme ve dvou základních polohách, ostatní si domyslete pootočením.
- Stručný zápis složeného strukturního elementu: 1 ovlivňuje příslušnost k objektu, 0 ovlivňuje příslušnost k pozadí a konečně hodnota $*$ znamená, že prvek nehraje roli.
- Ztenčování a ztlušťování prvky Golayovy abecedy je idempotentní.

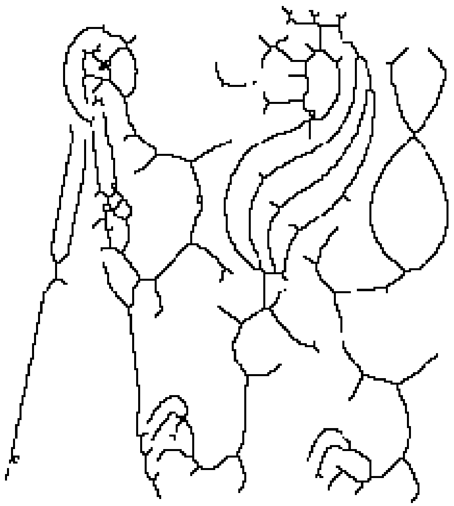
Ztenčování elementem L, homotopická náhrada skeletu tloušťky 1

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & * \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ * & 1 & * \end{bmatrix} \ldots$$

5 iterací

Ztenčování elementem L, pokračování

Ztenčování až do dosažení idempotence.

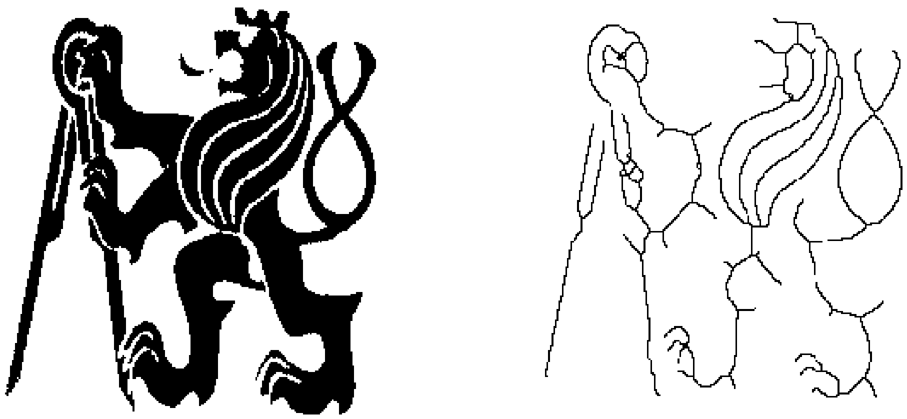


Ořezání volných konců elementem E

$$E_1 = \begin{bmatrix} * & 1 & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ldots$$

Pokud by se ztenčování nechalo běžet až do dosažení idempotence, zůstaly by v obraze pouze uzavřené linie.

5 iterací

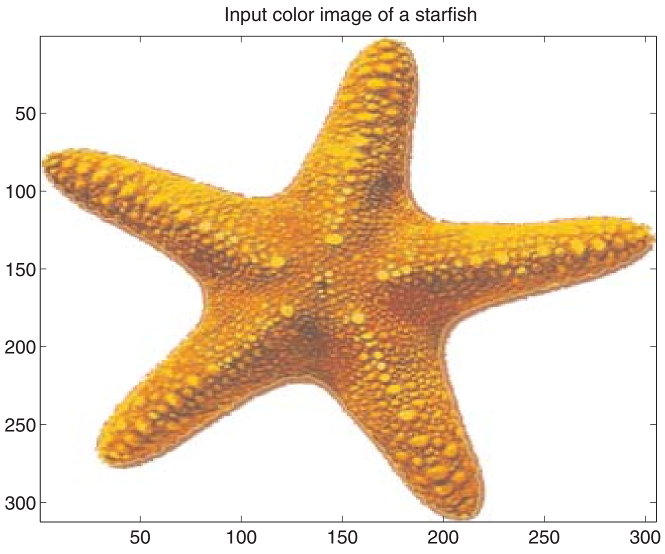


Motivace pro sekvenční morfologii
Vzdálenostní transformace

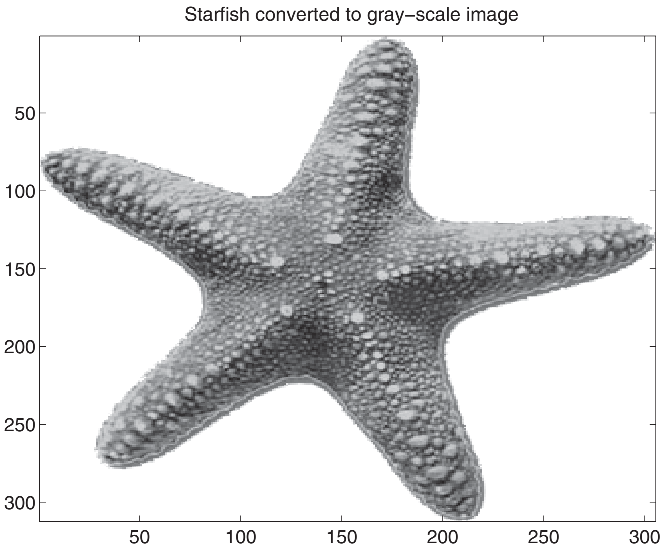
- Dosud nezáleželo na pořadí míst, v jakých byl morfologický operátor v obrazu použit. Operátor mohl být použit v náhodném pořadí, po řádcích, paralelně, atd.
- Speciálnější přístup, kdy je vhodně předepsáno pořadí míst použití operátoru v obraze, může přinést podstatné zrychlení výpočtu. Výsledek operátoru totiž bude záviset nejen na vstupním obraze a zvolené morfologické transformaci, ale na mezivýsledcích v předchozích polohách operátoru.
- Tím se může při výpočtu akumulovat potřebná globální informace, operátor může využít předchozí výsledky, a tak lze algoritmy výpočetně zjednodušit a zrychlit.
- Morfologické operátory opírající se o efektivní algoritmus výpočtu vzdálenostní transformace (probrána dříve) jsou důležitým příkladem tohoto přístupu, např. při hledání skeletu v binární matematické morfologii.

Vzdáleností transformace
příklad hvězdice, vstupní obrázek

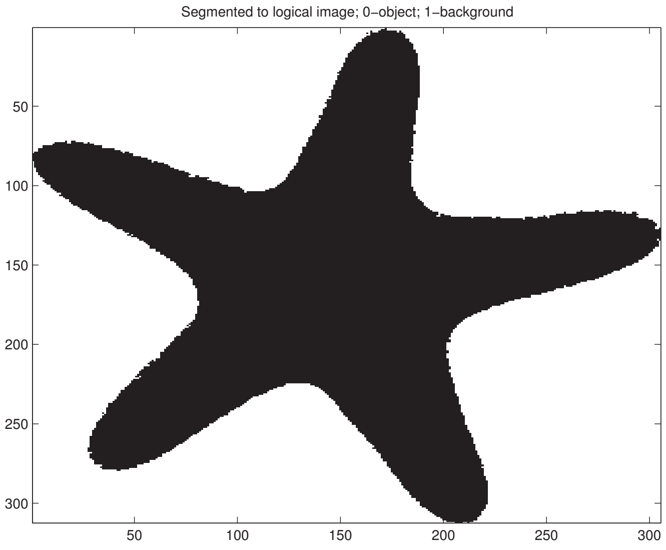
Vzdálenostní transformaci jsme probrali v přednášce Digitální obraz, základní pojmy.



barevný

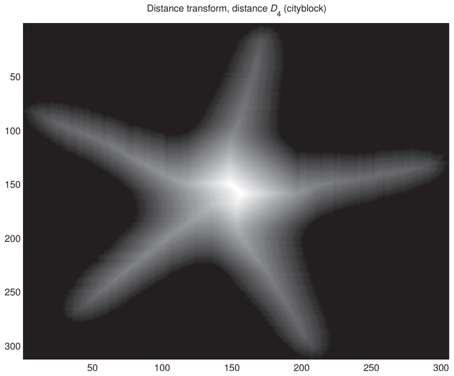


šedotónový

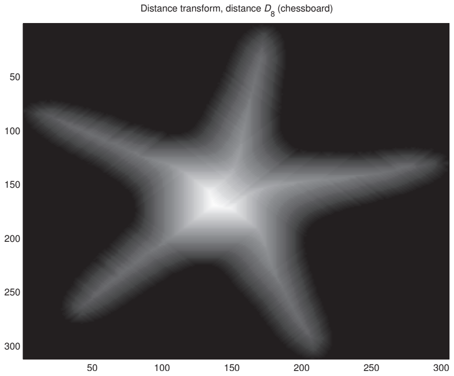


binární

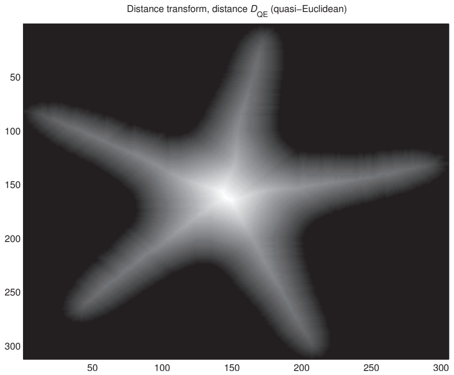
DT příklad hvězdice, výsledky



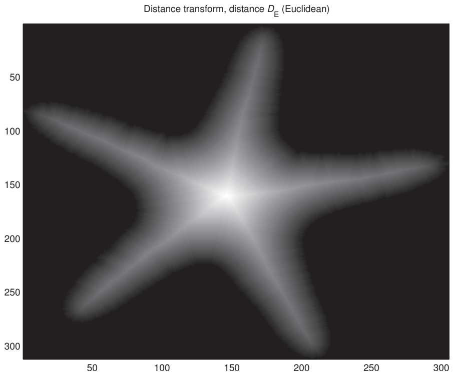
D4



D8



kvazieuklidovská



euklidovská

Uvažujme topografický pohled na obrazovou funkci $f(x, y)$, tj. jako na krajinu, kde jas odpovídá nadmořské výšce.

Body skeletu objektu leží na “hřebenech pohoří”.