Šedotónová matematická morfologie

Václav Hlaváč

České vysoké učení technické v Praze

Český institut informatiky, robotiky a kybernetiky

160 00 Praha 6, Jugoslávských partyzánů 1580/3

http://people.ciirc.cvut.cz/hlavac, vaclav.hlavac@cvut.cz

také z Centra strojového vnímání, http://cmp.felk.cvut.cz

Poděkování: Petr Matula, Petr Kodl, Jean Serra, Miroslav Svoboda

Osnova přednášky:

- Ekvivalence mezi funkcí a množinou.
- Stín a vršek množiny.
- Šedotónová dilatace a eroze.
- Transformace vrchní část klobouku..
- Geodetické metody. Konečná eroze.
- Morphological reconstruction.

Rychlé neformální vysvětlení

- Šedotónová matematická morfologie je zobecněním binární morfologie pro obrázky s více jasovými úrovněmi nebo voxely.
- Bodová množina $A \in \mathbb{E}^3$. První dvě souřadnice množiny tvoří definiční obor a třetí souřadnice odpovídá funkční hodnotě.
- Klíčovou roli zde hrají pojmy supremum (též nejmenší horní odhad), resp. infimum (též největší dolní odhad) nahrazené ve skutečných výpočtech operacemi $\min$, resp. $\max$.
- Eroze (resp. dilatace) obrazu s plochým strukturním elementem přiřazuje každému pixelu v okolí okamžitého bodu minimální (resp. maximální) hodnotu.
- Obecný strukturní element (funkce) je funkcí dvou proměnných. Ovlivňuje, jakým způsobem se berou v úvahu hodnoty obrazu v okolí. Hodnota strukturního elementu je přičtena (nebo odečtena), když se v okolí počítá maximum (nebo minimum).

Šedotónová matematická morfologie vysvětlená pomocí binární morfologie

- Je možné zavést šedotónovou matematickou morfologii pomocí již zavedené binární (černobílé) matematické morfologie.

  R.M. Haralick, S.R. Sternberg, X. Zhuang: Image analysis using mathematical morphology, IEEE Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 9, No. 4, 1987, pp. 532-550.

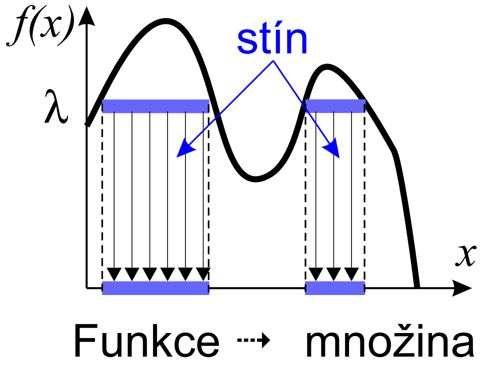
- Začneme nejdříve tímto vysvětlením šedotónové morfologie přes binární morfologii. Později budeme pokračovat alternativním vysvětlením přes $\sup$, $\inf$.

- Potřebujeme nejdříve zavést pojem vršek (bodové) množiny a pojem stín.

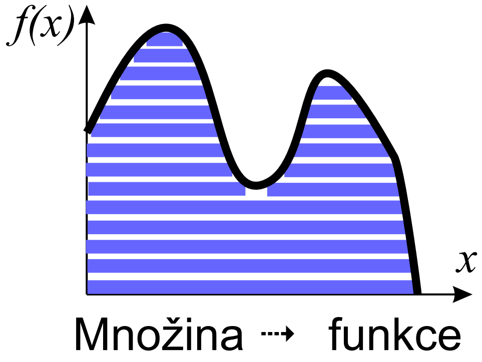
Ekvivalence mezi množinami a funkcemi

- Na funkci lze nahlížet jako na sebe položené zmenšující se množiny. Každá množina X_λ je průnikem mezi stínem funkce a vodorovnou rovinou (v příkladě přímkou).

$$X_\lambda = \{X \in \mathbb{E},\ f(x) \geq \lambda\}$$
$$\Rightarrow f(x) = \sup\{\lambda \colon x \in X_\lambda(f)\}$$

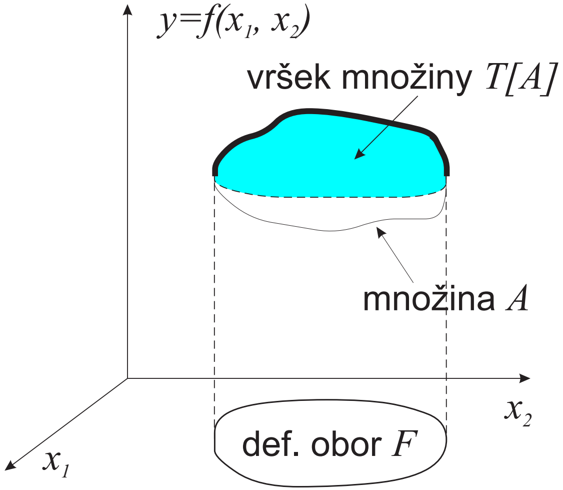


- Ekvivalentně lze říci, že f je shora polospojitá nebo, že $\{X_\lambda\}$ je uzavřená množina.

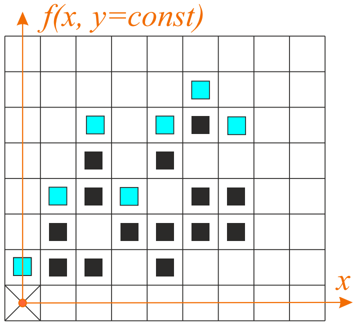


- Obráceně, jsou-li dány množiny $\{X_\lambda\}$ uzavřených množin, kdy $\lambda \geq \mu \Rightarrow X_\lambda \subseteq X_\mu$ a $X_\lambda = \cap\{X_\mu,\ \mu < \lambda\}$ potom existuje jednoznačná a shora polospojitá f, jejímiž řezy jsou množiny $\{X_\lambda\}$.

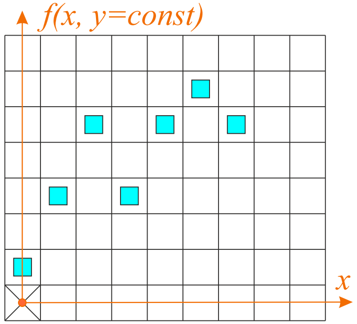
Vršek množiny (angl. top of the surface)



Příklad v 1D



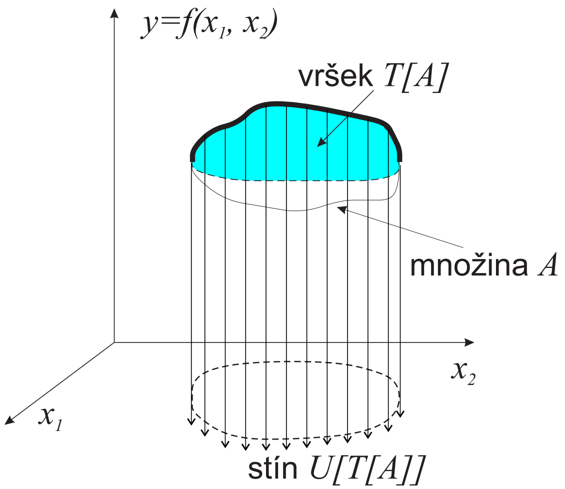
Libovolná množina



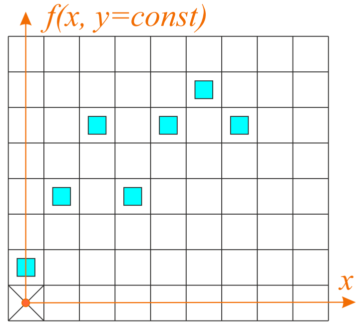
Vršek množiny

- Nechť $A \subseteq \mathbb{E}^n$ a definiční obor $F = \{x \in \mathbb{E}^{n-1}$ pro některá $y \in \mathbb{E}$, $(x, y) \in A\}$.
- Vršek množiny A označovaný $T[A]$ je zobrazením $F \rightarrow \mathbb{E}$:
$T[A](x) = \max\{y,\ (x, y) \in A\}$.

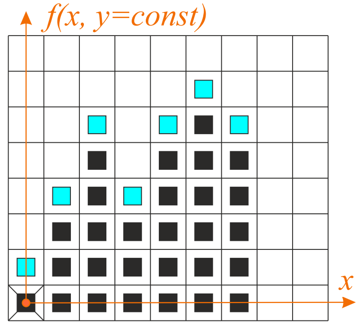
Stín (angl. umbra)



Příklad v 1D



Vršek množiny



Stín množiny

- Nechť $F \subseteq \mathbb{E}^{n-1}$ a $f\colon F \to \mathbb{E}$.
- Stín funkce f se označuje $U[f]$, $U[f] \subseteq F \times \mathbb{E}$,
  $U[f] = \{(x, y) \in F \times \mathbb{E},\, y \le f(x)\}$.

Šedotónová dilatace, eroze pomocí binárních dilatací a erozí

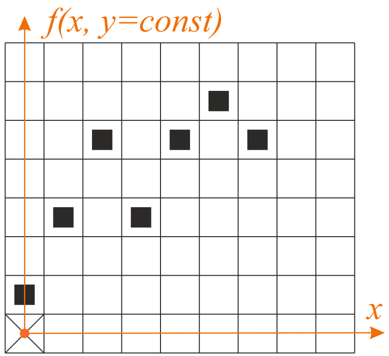
- Využije se funkce (množina) stín U and funkce (množina) vršek T.
- Dilatace:

$$f \oplus k = T[U[f] \oplus U[k]]$$

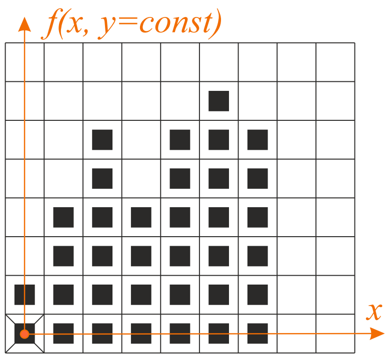
- Eroze:

$$f \ominus k = T[U[f] \ominus U[k]]$$

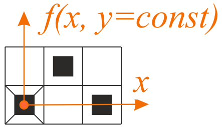
Šedotónová dilatace, 1D příklad



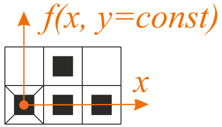
f



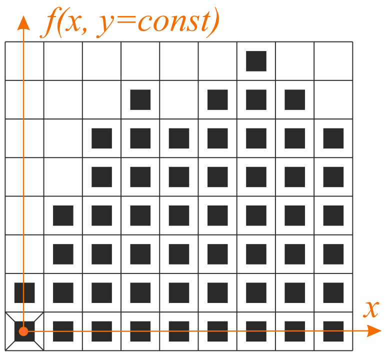
$U[f]$



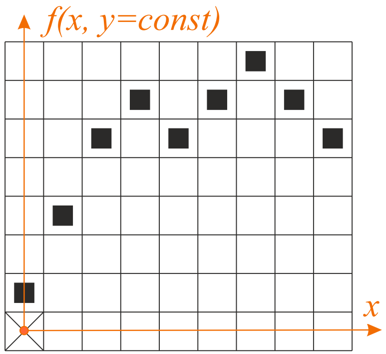
k



$U[k]$

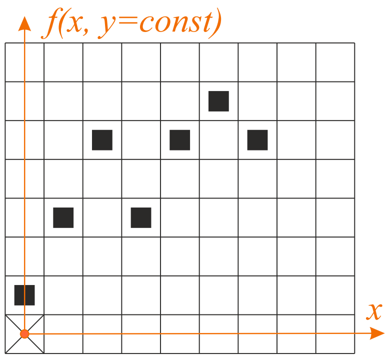


$U[f] \oplus U[k]$

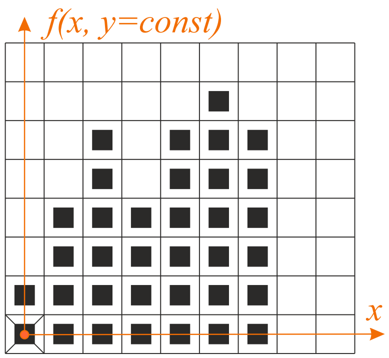


$T[U[f] \oplus U[k]] = f \oplus k$

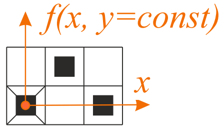
Šedotónová eroze, 1D příklad



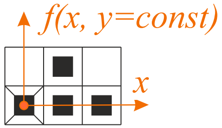
f



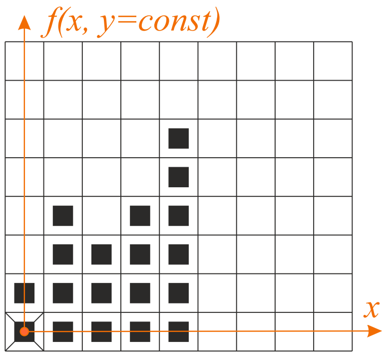
$U[f]$



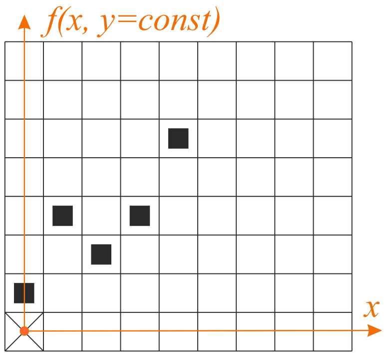
k



$U[k]$



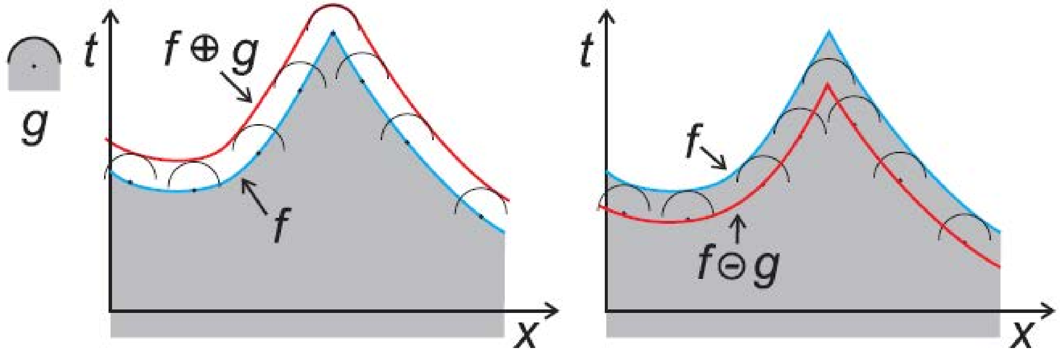
$U[f] \ominus U[k]$



$T[U[f] \ominus U[k]] = f \ominus k$

Šedotónová dilatace/eroze vyjádřena svazy

- Jde o alternativní přístup využívající uspořádání ve struktuře T ve svazu funkcí T^E.
- Funkce g představuje strukturní element.
- Dilatace $(f \oplus g)(x) = \sup\limits_{y \in Y} \{f(y) + g(x-y)\}$
- Eroze $(f \ominus g)(x) = \inf\limits_{y \in Y} \{f(y) - g(x-y)\}$

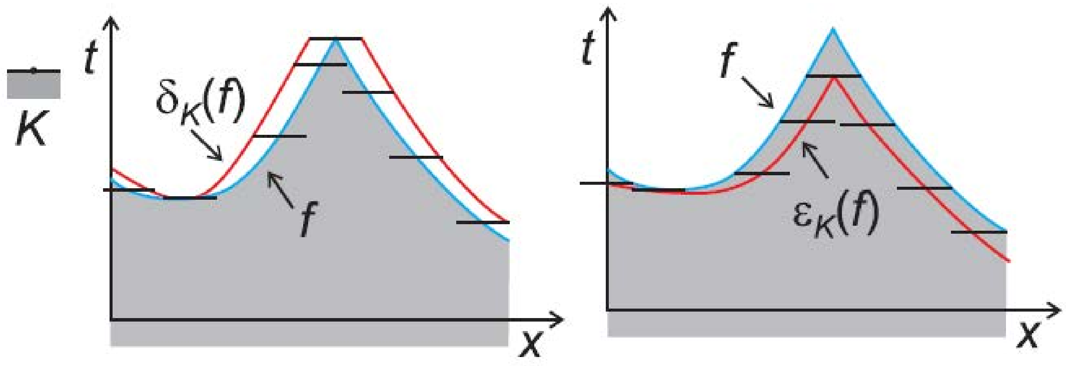


Obrázek, poděkování Petr Matula

Dilatace/eroze plochým strukturním elementem

- Ploché strukturní elementy g jsou definované jako rovné nule na kompaktní množině K a rovné hodně $\max(T)$ jinde
- Můžeme napsat

$$(f \oplus g)(x) = \sup_{y \in E,\, x-y \in K} f(y) = \sup_{y \in K_x} f(y)$$
$$(f \ominus g)(x) = \inf_{y \in E,\, x-y \in K} f(y) = \inf_{y \in \breve{K}_x} f(y)$$



Obrázek, poděkování Petr Matula

Poznámky, plochý strukturní element

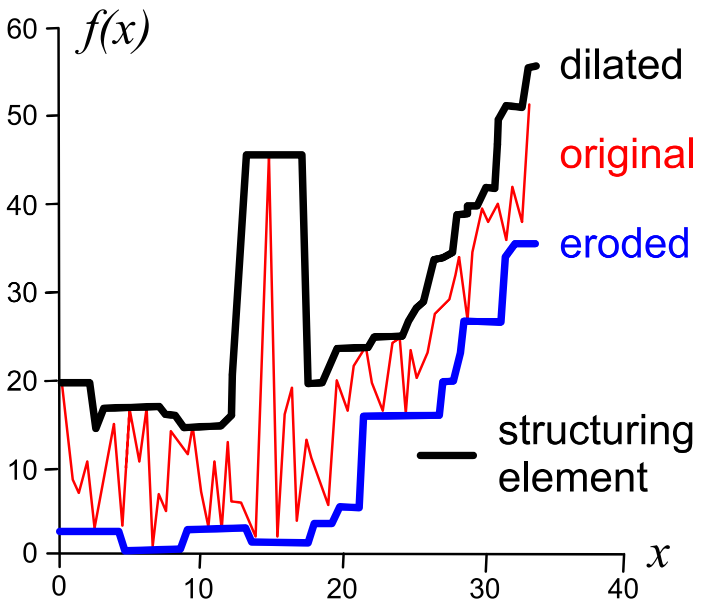
- Eroze

$$(f \ominus g)(x) = \inf_{y \in E,\, x-y \in K} f(y) = \inf_{y \in \breve{K}_x} f(y)$$

- Kladné špičky se ořežou a zploští. Údolí se rozšíří a zploští.
- Dilatace poskytuje duální efekt.

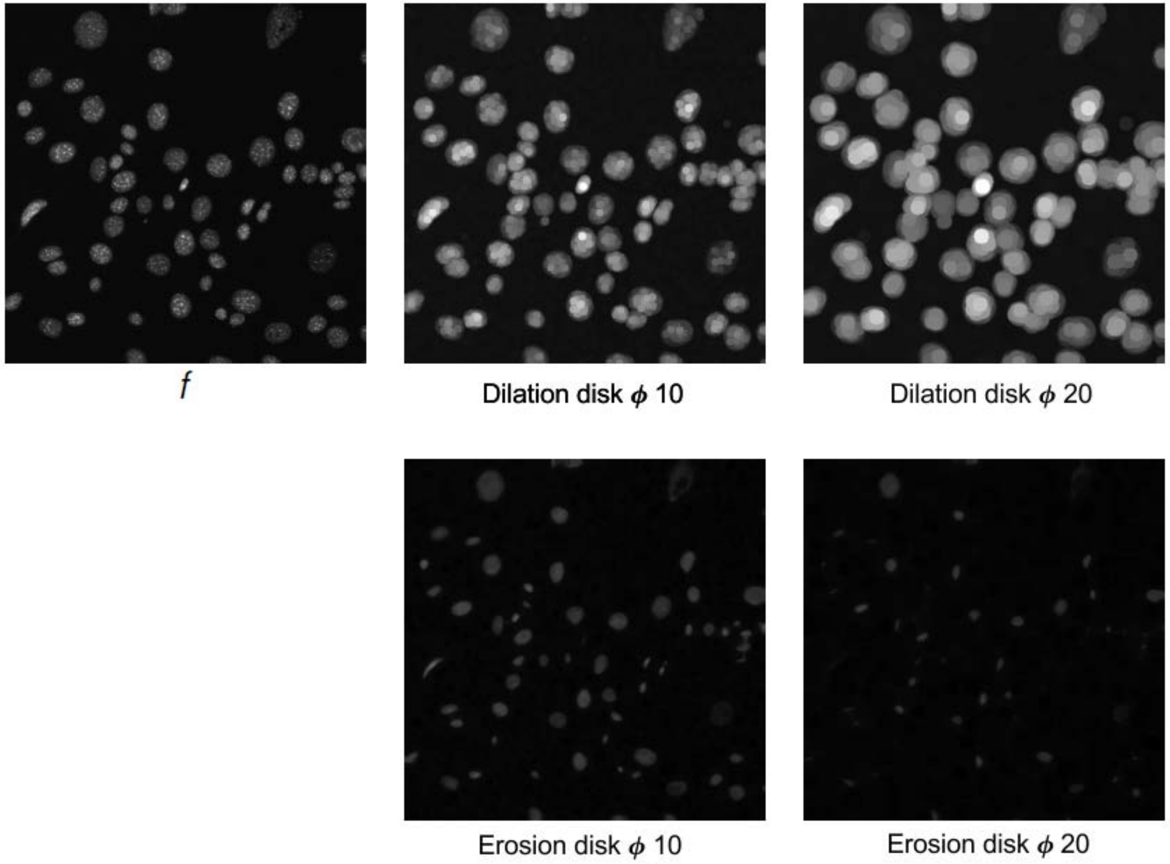
$$(f \oplus g)(x) = \sup_{y \in E,\, x-y \in K}$$

$$f(y) = \sup_{y \in K_x} f(y)$$



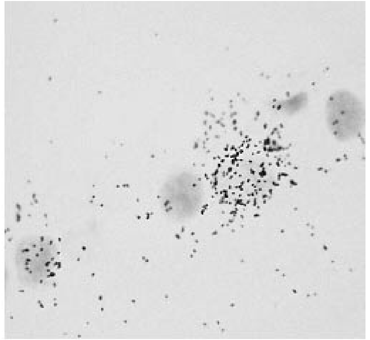
Myšlenka obrázku, poděkování J. Serra.

Příklad: dilatace, eroze s plochým strukturním elementem

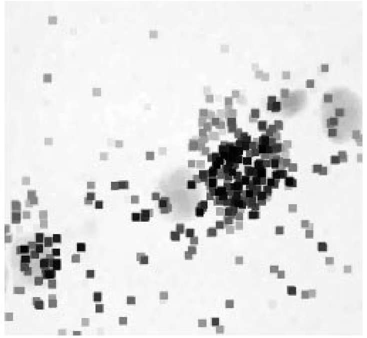


Obrázek, poděkování Petr Matula

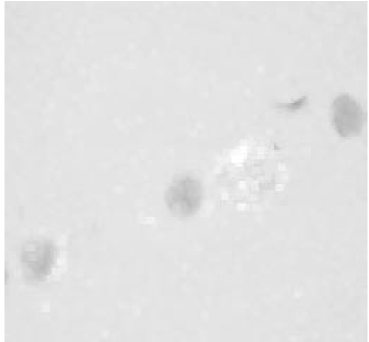
Příklad: šedotónové morfologické předzpracování



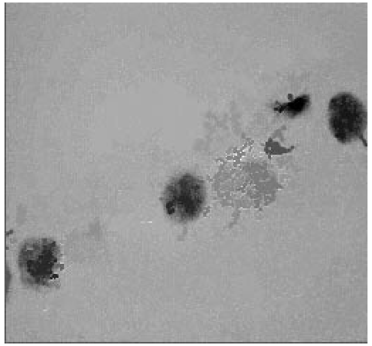
(a) originál



(b) eroze tmavého)



(c) dilatace tmavého v (b)



(d) rekonstr. buňky

Poznámky k šedotónové dilataci/erozi

- Dilatace a eroze s plochým strukturním elementem pro šedotónové obrázky jsou ekvivalentní s použitím $\max$ a $\min$ filtrů.
- Doporučuje se pracovat s šedotónovými obrázky, co nejdéle to jde. Prahování je lepší odložit na co nejpozdější dobu.
- Porovnání dilateace/eroze s konvolucí

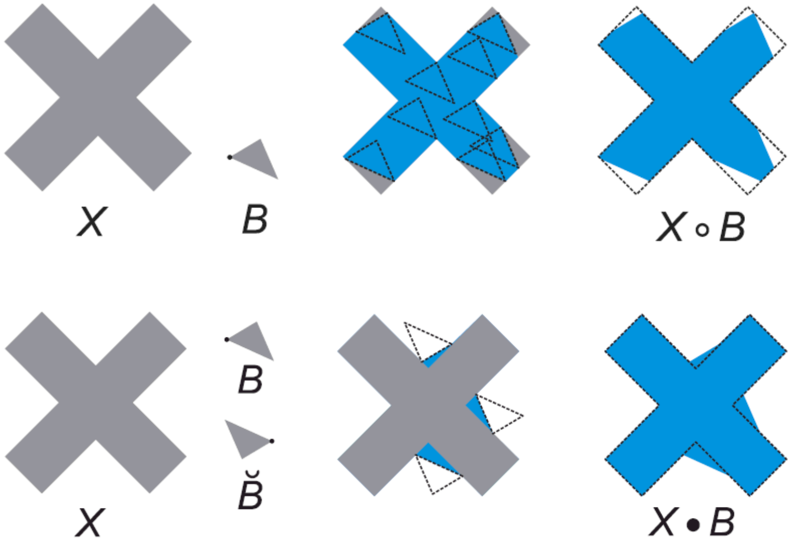
Konvoluce: $(f * g)(x) = \sum_{y \in Y} f(x-y) \cdot g(y)$

Dilatace $(f \oplus g)(x) = \sup_{y \in Y} \{f(y) + g(x-y)\}$

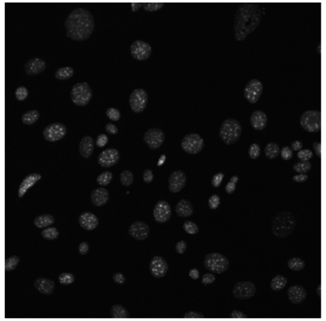
Konvoluce		*Dilatace/eroze*	*Poznámka*
Sčítání	$\leftrightarrow$	$\sup$ or $\inf$	nelineární
Násobení	$\leftrightarrow$	Sčítání	lineární

Otevření a uzavření

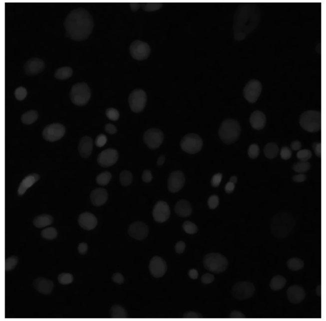
- Vzpomeňme si na přednášku z binární morfologie. Filtr je morfologickým filtrem právě když je rostoucí a idempotentní.
- Šedotónová dilatace a eroze jsou morfologickými filtry.
- Otevření: $X \circ B = (X \ominus B) \oplus B$
- Uzavření: $X \bullet B = (X \oplus B) \ominus B$



Příklady otevření a uzavření

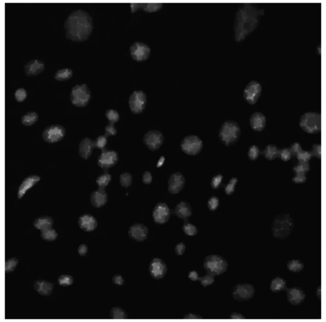


f

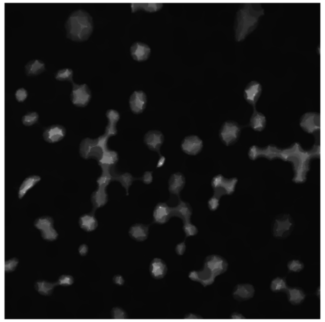


$\gamma_{Disk\varnothing 10}(f)$

$\gamma_{Disk\varnothing 20}(f)$



$\psi_{Disk\varnothing 10}(f)$



$\psi_{Disk\varnothing 20}(f)$

Obrázek, poděkování Petr Matula

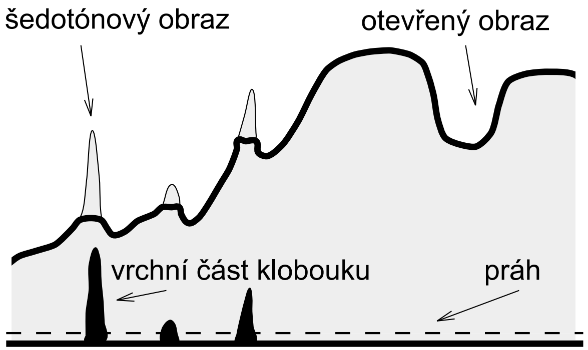
Šedotónová operace tref či miň (hit or miss)

- Dilatace a eroze jsou ještě mocnější, když se kombinují.
- Příkladem je šedotónová operace tref či miň, která slouží k porovnávání se vzorem. Uvažujme dva strukturní elementy se stejným reprezentativním bodem (počátkem souřadnic). První strukturní element B_{fg} je vzorem pro popředí, druhý je vzorem pro pozadí B_{bg}.
- Šedotónový operátor tref či miň se definuje jako

$$X \otimes B = (X \ominus B_{\mathrm{fg}}) \cap (X \ominus B_{\mathrm{bg}})$$

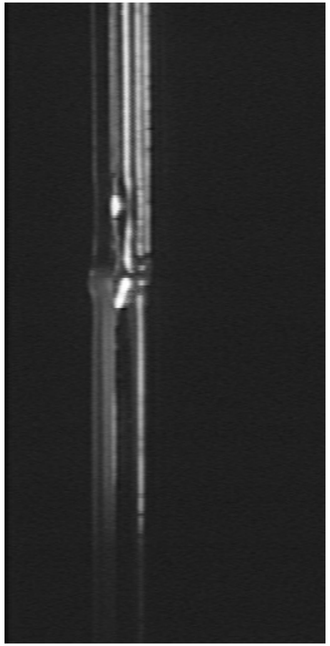
Transformace vrchní část klobouku

- Angl. Top Hat transform.
- Definice: $X \setminus (X \circ K)$.
- Používá se pro segmentaci objektů lišících se jasem, i když se jas pozadí pomalu mění.
- Části obrazu větší než strukturní element K se odstraní. Po odečtení zůstanou jen odstraněné části, tj. objekty na vyrovnaném pozadí. Objekty se najdou prahováním.

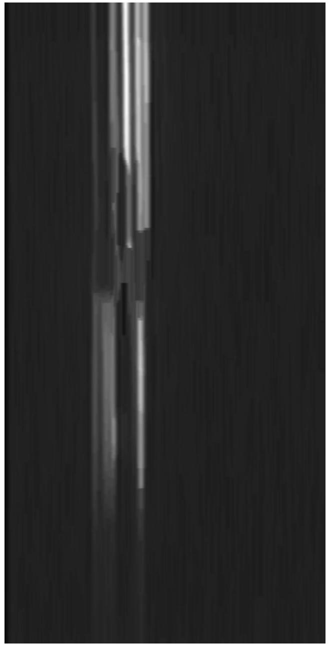


Příklad: výroba kapilár skleněných teploměrů

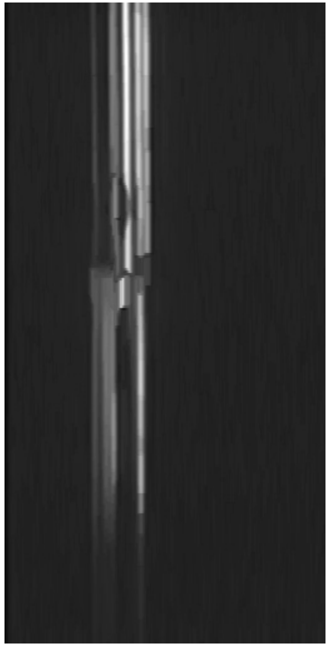
Průmyslový příklad na transformaci vrchní část klobouku.



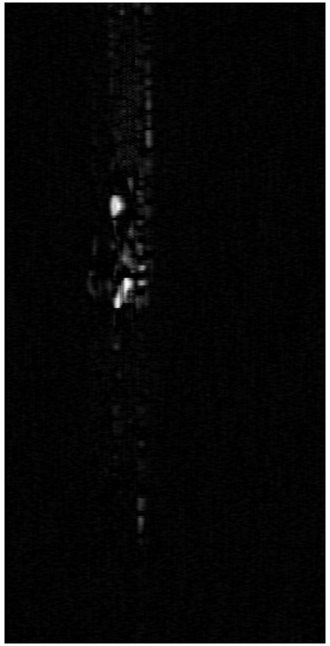
Originál
512×256



Eroze strukt.
elem. 1×20



Otevření tímž
strukt. elem.



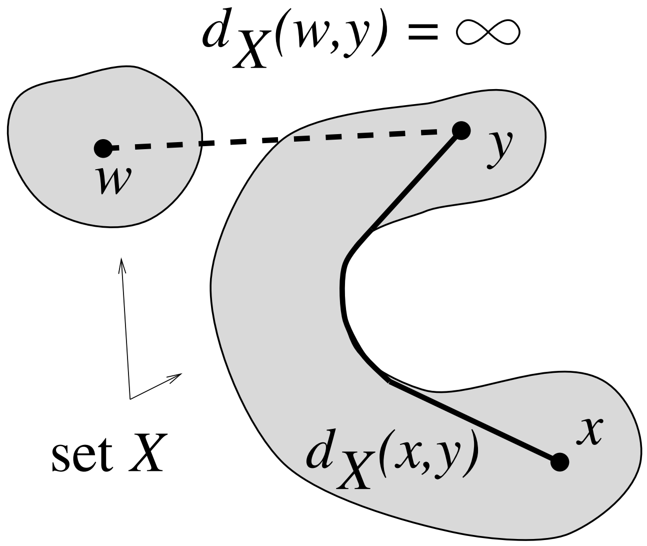
Výsledná
segmentace

Geodetické metody v matematické morfologii

- Geodetické metody změní morfologické operace tak, aby se uplatnily pouze na části obrázku.
- Příklad: Má-li se například rekonstruovat objekt ze značky, řekněme buňky z buněčného jádra, je žádoucí zabránit růstu mimo buňku.
- Později u složitějších metod uvidíme, že se strukturní element může měnit v každém pixelu podle lokálních hodnot obrazové funkce.

Geodetická vzdálenost

- Geodetická vzdálenost $d_X(x, y)$ je délka nejkratší cesty mezi dvěma body x, y, za podmínky, že leží uvnitř množiny X.
- Není-li taková cesta, definuje se geodetická vzdálenost $d_X(x, y) = +\infty$.

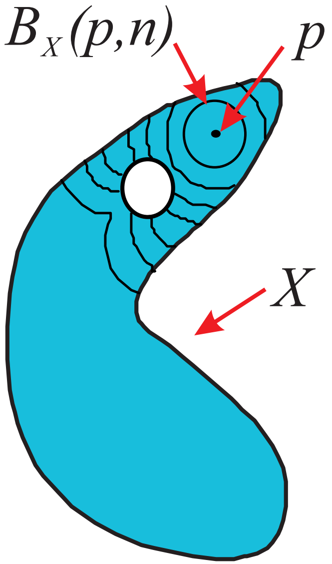


Geodetický kruh (koule, nadkoule)

- Geodetický kruh (koule, nadkoule pro dimenzi prostoru > 3) je kruh omezený množinou X.
- Geodetický kruh $B_X(p,n)$ se středem $p \in X$ a poloměrem n je definován jako

$$B_X(p,n) = \{p' \in X,\ d_X(p,p') \le n\}\ .$$

- Zavedení geodetického kruhu dovoluje použít eroze a dilatace pouze uvnitř podmnožiny Y obrazu X.



Podmíněná dilatace

- Slouží jako základ geodetických transformací a morfologické rekonstrukce.
- Podmíněná dilatace množiny X (zvané také marker, značkovač) strukturním elementem B při použití referenční množiny R (zvané maska)

$$\delta_{R,B}^{(1)} = (X \oplus B) \cap R \,,$$

  kde horní index $^{(n)}$ znamená velikost dilatace, v tomto zvláštním případě $n = 1$.
- Je zřejmé, že $\delta_{R,B}^{(1)} \subseteq R$.
- Množina B je obvykle malá, často základní strukturní element odpovídající zavedené relaci sousedství mezi pixely. Kvůli zjednodušení zápisu se u podmíněné dilatace δ obvykle vynechává dolní index B.

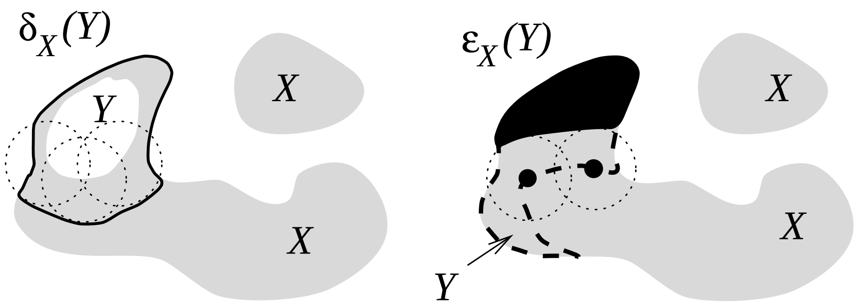
Podmíněná geodetická dilatace a eroze

- Geodetická dilatace $\delta_X^{(n)}(Y)$ o velikosti n množiny Y obsažené v množině X,

$$\delta_X^{(n)}(Y) = \bigcup_{p \in Y} B_X(p,n) = \left\{ p' \in X,\ \exists p \in Y,\ d_X(p,p') \le n \right\}.$$

- Geodeticá eroze $\epsilon_X^{(n)}(Y)$ o velikosti n množiny Y obsažené v množině X,

$$\epsilon_X^{(n)}(Y) = \left\{ p \in Y,\ B_X(p,n) \subseteq Y \right\} = \left\{ p \in Y,\ \forall p' \in X \setminus Y,\ d_X(p,p') > n \right\}.$$



Geodetická dilatace, eroze, implementace

- Nejjednodušší geodetická dilatace velikosti 1 ($\delta_X^{(1)}$) množiny Y (značky) uvnitř X se získá jako průnik dilatace množiny Y s kruhem o velikosti 1 a množiny X

$$\delta_X^{(1)} = (Y \oplus B) \cap X \,.$$

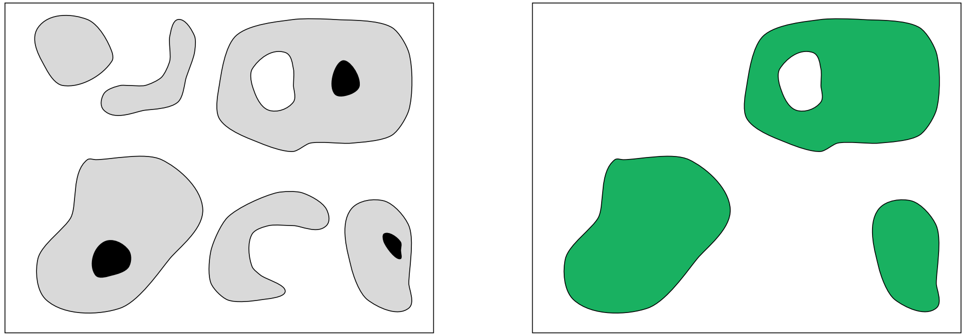
- Geodetické dilatace o větší velikosti n se vypočtou n-krát opakovanou dilatací s jednotkovým kruhem

$$\delta_X^{(n)} = \underbrace{\delta_X^{(1)}\Big(\delta_X^{(1)}\big(\delta_X^{(1)} \ldots (\delta_X^{(1)})\big)\Big)}_{n \text{ krát}} \,.$$

- Rychlý iterativní způsob výpočtu geodetické eroze je podobný.

Morfologická rekonstrukce, motivace

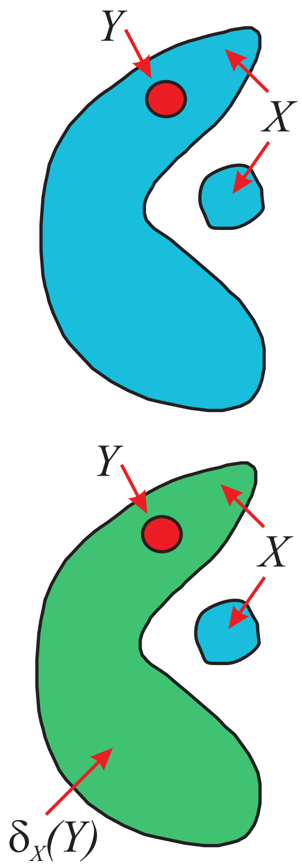
- Představme si, že chceme rekonstruovat objekty daného tvaru z binárního obrazu, který původně vznikl segmentací prahováním. Množina X je sjednocením všech souvislých komponent výsledku prahování.
- Jen některé ze souvislých komponent byly označeny ručně nebo automaticky značkami. Jejich sjednocení tvoří množinu značek Y.
- Úkolem je rekonstruovat jen označené oblasti



Rekonstrukce X (označuje světle šedá) ze značek Y (černá). Rekonstruovaný výsledek je označen na pravé straně obrázku zeleně.

Morfologická rekonstrukce

- Opakované geodetické dilatace množiny Y obsažené v množině X rekonstruují souvislé komponenty X původně označené Y.
- Při dilataci ze značek Y zmizí části X neobsahující Y.
- Geodetické dilatace skončí, když se rekonstruují všechny souvislé komponenty X označené značkami Y. Tehdy se dosáhne idempotence, tj. $\forall n > n_0$, $\delta_X^{(n)}(Y) = \delta_X^{(n_0)}(Y)$.
- Této operaci se říká rekonstrukce and označuje se $\rho_X(Y)$. Formálně $\rho_X(Y) = \lim_{n\to\infty} \delta_X^{(n)}(Y)$.
- Rekonstrukce pomocí dilatace je otevřením vzhledem k Y a uzavřením vzhledem k X.

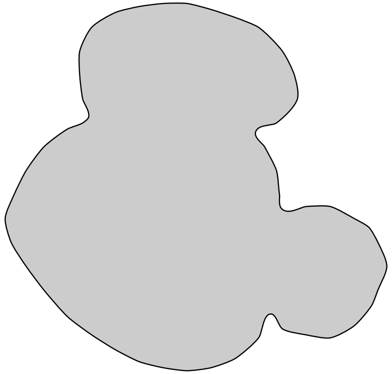


Myšlenka automatického značkování objektů

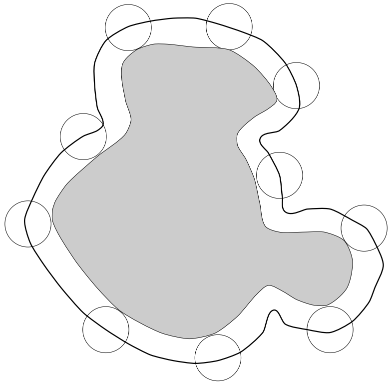
- Myšlenka: konvexní oblast v binárním obraze lze reprezentovat značkou "uprostřed oblasti".
- Triviálně splněno pro nedotýkající kruhy.
- Obecně je to složitější.
- Postupné erodování, značkou je místo těsně před úplným zmizením oblasti. Pojem: konečná eroze.
- Pro nekonvexní oblasti se nejdříve rozdělí na jednodušší konvexní části.

- The explanation plan:
  - Quench function – associates each point of the skeleton to a radius of an inscribed circle.
  - Several types of extremes in digitized functions (images).
  - Ultimate erosion.

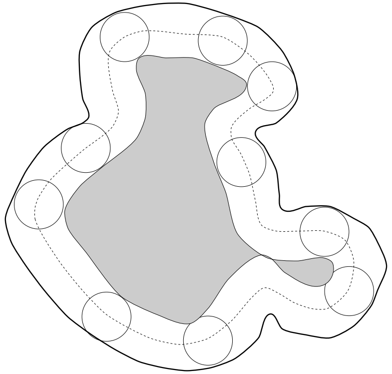
Postupné erodování, příklad



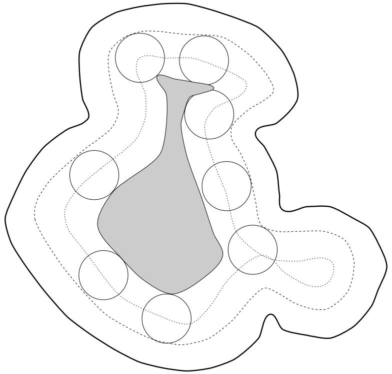
Originál



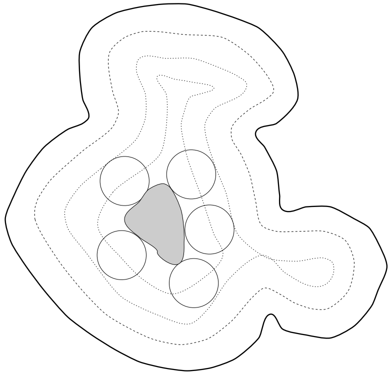
1. eroze



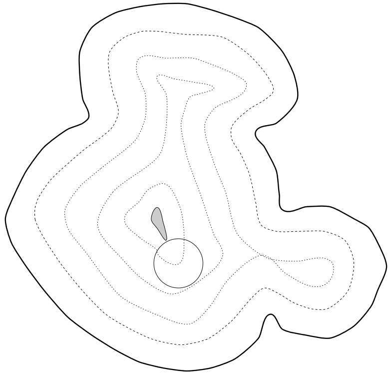
2. eroze



3. eroze



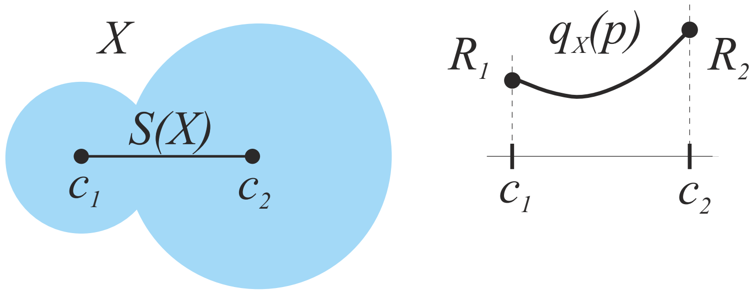
4. eroze



5. eroze

Vyplňovací (angl. quench) funkce

- Binární bodovou množinu (2D oblast) X lze ekvivalentně reprezentovat vyplněním maximálními kruhy B.
- Každému bodu p skeletu $S(X)$ tvořenému na základě maximálních kruhů odpovídá kruh B o poloměru $q_X(p)$.
- Pojem vyplňovací funkce vyjadřuje tuto asociaci.
- Příklad: Vyplňovací funkce pro dva překrývající se kruhy.
  c_1, c_2 jsou středy kruhů. R_1. R_2 jsou příslušné poloměry výchozích kruhů.
  Vyplňovací funkce$q_X(p)$ je nakrelena v pravé části obrázku.



Skelet $S(X)$ binárního obrázku X složeného ze dvou překrývajících se kruhů.

- *Později uvidíme, že analýza různých maxim vyplňovací funkce se hodí pro definici konečné eroze..*

Oblast jako sjednocení max. kruhů

- V binární morfologii lze bodovou množinu X také vyjádřit jako sjednocení maximálních kruhů B.
- Každému bodu p skeletu $S(X)$ je jednoznačně přiřazen maximální kruh o poloměru $q_X(p)$ (angl. quench function).
- Známe-li pro každý bod skeletu $q_X(p)$, potom lze výchozí bodovou množinu X rekonstruovat jako sjednocení maximálních kruhů B

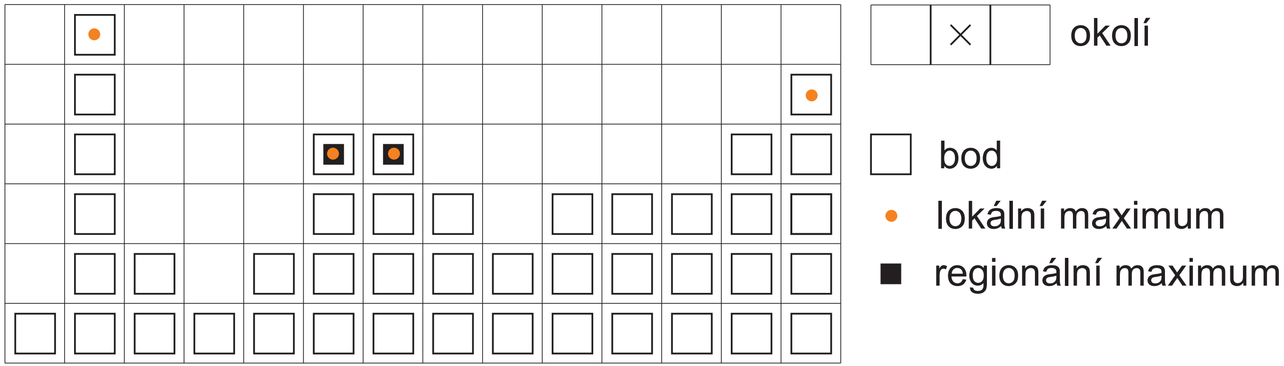
$$X = \bigcup_{p \in S(X)} (p + q_X(p)\, B)\ .$$

Tři typy extrémů šedotónové obrazové funkce

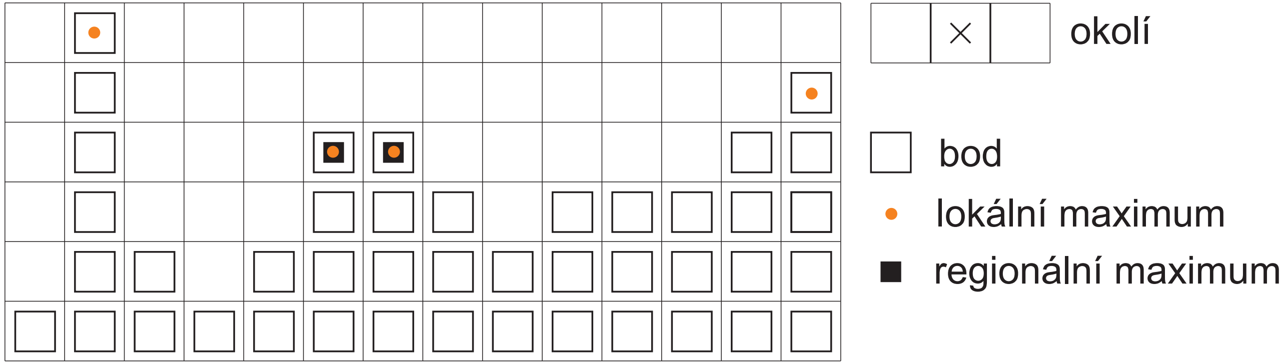
Globálním maximem obrazu I je pixel p s nejvyšší hodnotou obrazové funkce $I(p)$ (v analogii nejvyšší vrchol v krajině).

Lokálním maximem je pixel p, právě když pro každý sousední pixel q pixelu p platí $I(p) \geq I(q)$.

Regionální maximum M obrazu I je souvislá množina pixelů s odpovídající hodnotou h (plató ve výšce h), kde každý pixel sousedící s množinou M má menší hodnotu obrazové funkce než h.



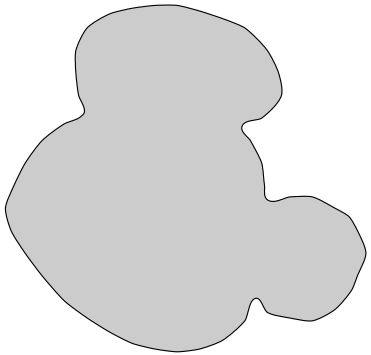
Ne všechna lokální maxima jsou regionálními maximy



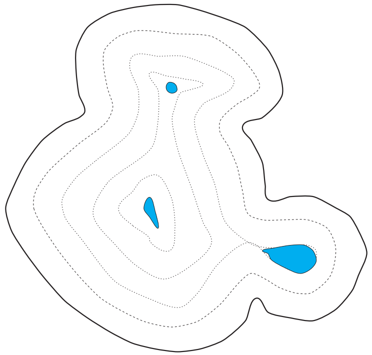
- Každý pixel regionálního maxima M v obrazové funkci I je také lokálním maximem.
- Opak neplatí, tj. existují lokální maxima, která nejsou regionálními maximy.

Konečná eroze $Ult(X)$

- Výsledek konečné eroze se obvykle používá jako automaticky stanovené značky konvexních objektů v binárních obrázcích.
- Situace ze zkomplikuje, když se konvexní oblasti překrývají, což vede ke vzniku nekonvexních oblastí. Vzpomeňme na dva překrývající se kruhy z příkladu z průsvitky 31.
- Konečná eroze $Ult(X)$ je množinou regionálních maxim vyplňovací funkce $q_X(p)$.
- Příklad: Konečná eroze je sjednocením souvislých komponent zbytků těsně než by při erodování zmizely.



Výchozí binární obrázek



Výsledek konečné eroze

Vyjádření konečné eroze pomocí rekonstrukce

- $\mathbb{N}$ je množina přirozených čísel, která poslouží pro rostoucí poloměry kruhů.
- Konečná eroze se může vyjádřit

$$Ult(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left((X \ominus nB) \setminus \rho_{X \ominus nB}(X \ominus (n+1)B) \right) .$$

- Efektivní výpočet konečné eroze se opírá o vzdálenostní funkci, která byla vysvětlena v přednášce Digitální obraz.

Rychlý výpočet pomocí vzdálenostní transformace

- Vzdálenostní transformace (funkce) $dist_X(p)$ přiřazuje každému pixelu p z množiny X velikost první eroze množiny, která už neobsahuje pixel p, tj.

$$\forall p \in X, \quad dist_X(p) = \min \{n \in \mathbb{N}\,,\ p \text{ not in } (X \ominus nB)\}\,.$$

- $dist_X(p)$ je nejkratší vzdáleností mezi pixelem p a doplňkem množiny X^C.

Vzdálenostní funkce má dvě přímá použití:

- Konečná eroze množiny X je tvořena sjednocením regionálních maxim vzdálenostní funkce množiny X.
- Skelet pomocí maximálních kruhů množiny X je dán množinou lokálních maxim vzdálenostní funkce množiny X.

Skelet vyjádřený zónami vlivu (SKIZ)

- Nechť je množina X tvořena n souvislými komponentami X_i, $i = 1, \ldots, n$.
- Zóna vlivu $Z(X_i)$ sestává z bodů, které jsou blíže k množině X_i než k jiné souvislé množině z X. Pozn. Podobný pojem je Voronoiův diagram z výpočetní geometrie.

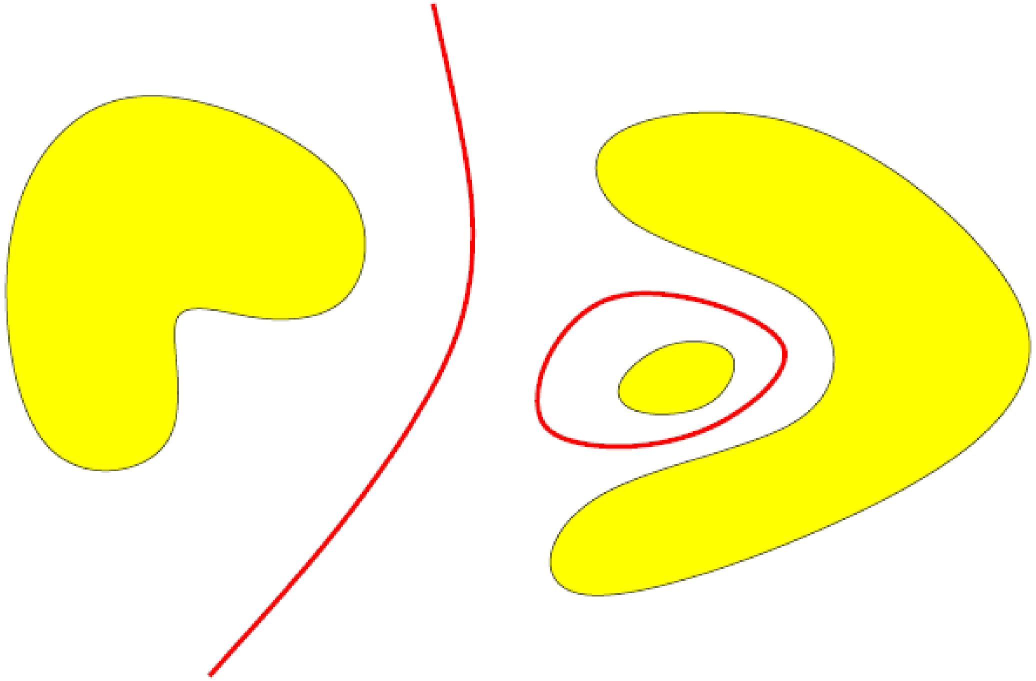
$$Z(X_i) = \left\{p \in \mathbb{Z}^2,\ \forall i \neq j,\ d(p, X_i) \leq d(p, X_j)\right\} .$$

- Skeleton vyjádřený zónami vlivu (SKIZ – skeleton by influence zones) $\mathrm{SKIZ}(X)$ je množinou hranic zón vlivu,

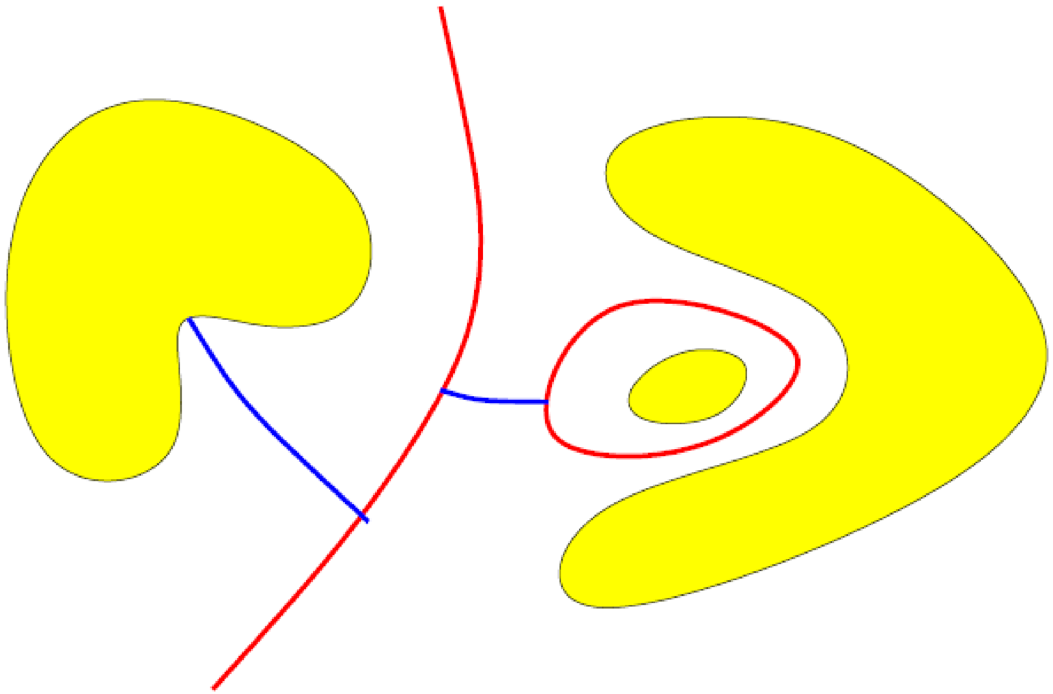
$$\mathrm{SKIZ}(X) = \left(\bigcup_i Z(X_i) \right)^C .$$

- Vlastnosti:
  - $\mathrm{SKIZ}(X)$ nemusí být spojitý, i když even X^C je spojitý.
  - $\mathrm{SKIZ}(X) \subseteq \mathrm{Skeleton}(X)$.

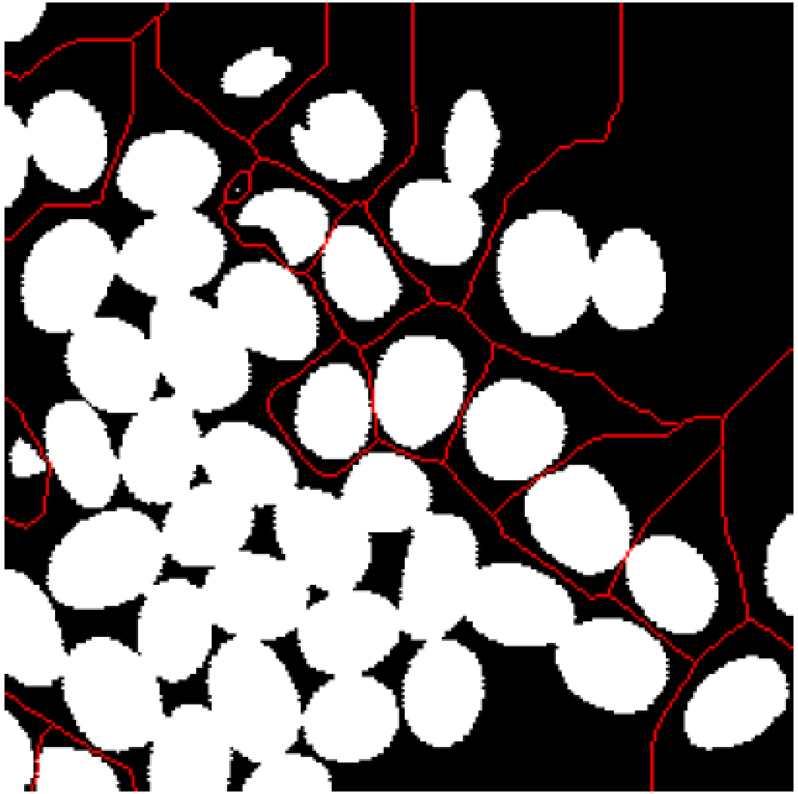
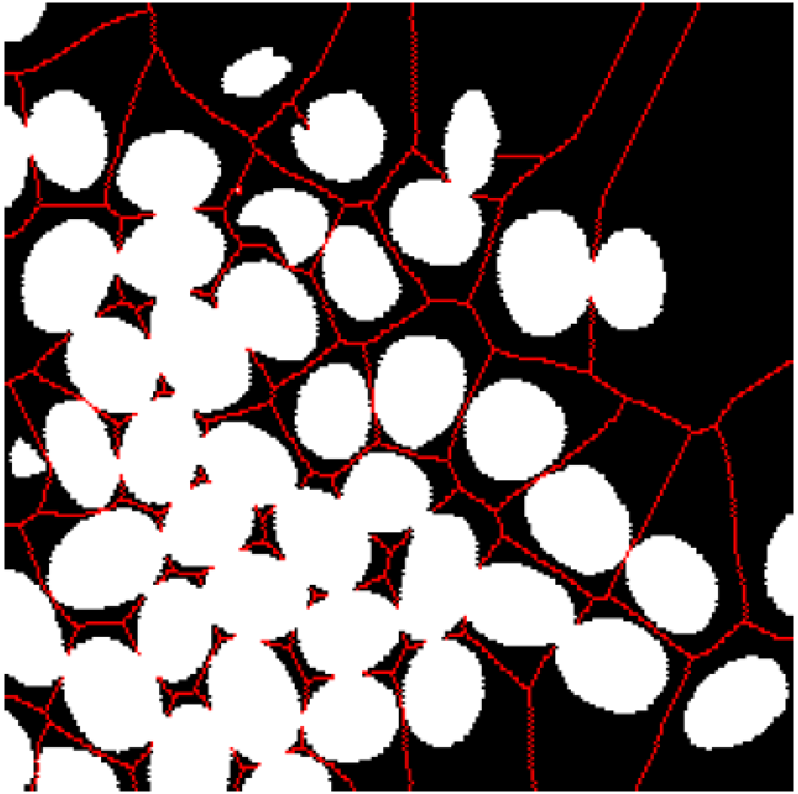
SKIZ, příklad na myšlenku



$\mathsf{SKIZ}(X) \subseteq \mathsf{Skeleton}(X)$



SKIZ(X) $\subseteq$ Skeleton(X), příklad, částice

Geodetické zóny vlivu
(když je oblast označena několika značkami)

- V některých aplikacích se hodí, když se jedna ze souvislých komponent X označí několika značkami Y.
- Když je to z naznačených příčin potřebné, je možné zobecnit pojem zóny vlivu na geodetickou zónu vlivu na souvislé komponenty množiny Y uvnitř X.